第1章 平面向量及其应用

方向距离一笔挥，
茫茫大海系安危．
展开合并等闲算，
勾股余弦未足奇．

Ⅰ. 全章整体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，向量理论具有深刻的数学内涵和丰富的物理背景. 向量既是几何研究对象，也是代数研究对象，是沟通几何与代数的桥梁. 通过本章的学习，可以帮助学生理解平面向量的几何意义和代数意义；掌握平面向量的概念、运算、向量基本定理以及向量的应用；用向量语言、方法表述和解决现实生活、数学与物理中的问题.

2. 学习目标

（1）平面向量的概念

①通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量的意义和两个向量相等的含义.

②理解平面向量的几何表示和基本要素.

（2）平面向量的运算

①借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量的加、减运算及运算规则，理解其几何意义.

②通过实例分析，掌握平面向量的数乘运算及运算规则，理解其几何意义. 理解两个平面向量共线的含义.

③了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

④通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的概念及其物理意义，会计算平面向量数量积.

⑤通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.

⑥会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

（3）平面向量基本定理及坐标表示

①理解平面向量基本定理及其意义.

②借助平面直角坐标系，掌握平面向量的正交分解及坐标表示.

③会用坐标表示平面向量的加、减运算与数乘运算.

④能用坐标表示平面向量的数量积，会表示两个平面向量的夹角.

⑤能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件.

（4）平面向量的应用与解三角形

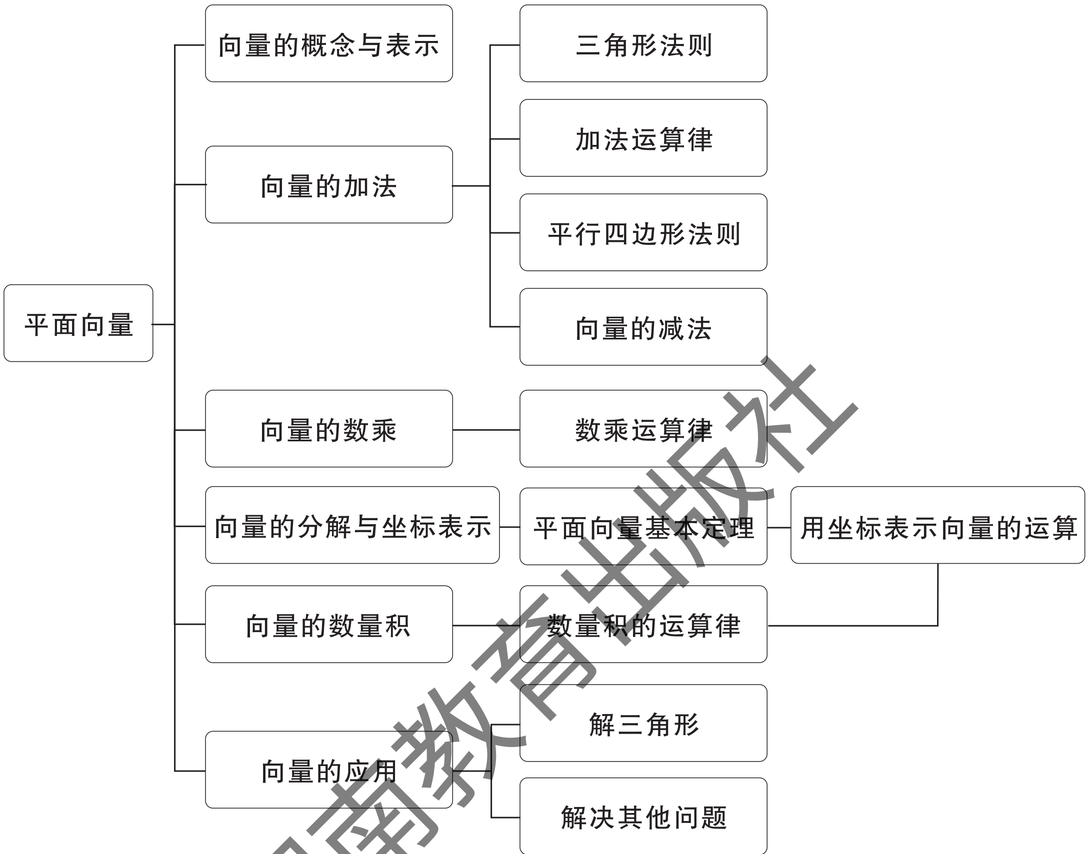
①会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题，体会向量在解决数学和实际问题中的作用.

②借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理.

③能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(以下简称《数学课标(2017 年版)》)将向量内容分两部分安排：必修课程中的“平面向量及其应用”和选择性必修课程中的“空间向量与立体几何”. 平面向量是学习空间向量的基础，空间向量是平面向量的推广. 在本章，教材以位移、速度、力等物理量为背景，抽象出向量的概念，即引入既有大小又有方向的量，然后从用带箭头的线段表示位移出发，引入有向线段来直观表示向量，进而给出零向量、单位向量的概念，以及定义平行向量、相等向量、共线向量等特殊而具有重要关系的向量. 数学中引进一个新的量，自然要考虑它的运算及其运算律的问题. 因此在引进向量概念后，类比我们熟悉的数的运算，接着讨论向量的运算(加减运算、数乘运算及数量积). 为了便于学生理解向量的运算法则，教材基本都是从向量的物理背景出发，如位移的合成、力的合成、做功来定义其加法、数乘、数量积的运算等. 向量作为沟通代数与几何的桥梁，要肩负起“沟通”重担，就要能够像数一样进行运算. 于是将同一直线上的向量用位于这条直线上的一个非零向量来度量，然后拓展到将平面内任一向量用这一平面内的两个不共线向量来表示，顺理成章地引进了向量的坐标表示，从而架起了沟通运算的桥梁，把图形的基本性质转化为向量的运算，体现了平面向量是“形”与“数”融合的重要载体. 又由于向量拥有深刻的几何背景，是解决几何问题的有力工具，因而其具有广泛的应用性. 于是，教材又结合大量实例，充分说明了用向量解决一些平面几何问题、物理问题的方法，特别是用向量方法证明余弦定理、正弦定理，让学生感受向量方法的力量.

本章共有 7 节内容：向量、向量的加法、向量的数乘、向量的分解与坐标表示、向量的数量积、解三角形、平面向量的应用举例.

“解三角形”作为平面向量的应用放在本章，没有像上版课标一样，将其单独成章. 其目的是运用简便的向量方法来证明余弦定理及正弦定理等，凸显了向量在解决数学问题中的工具作用.

三、课时安排建议

本章教学约需 18 课时，具体分配如下(仅供参考)：

1.1 向量	1 课时
1.2 向量的加法	2 课时
1.3 向量的数乘	2 课时
1.4 向量的分解与坐标表示	
1.4.1 向量分解及坐标表示	1 课时
1.4.2 向量线性运算的坐标表示	1 课时
1.5 向量的数量积	
1.5.1 数量积的定义及计算	2 课时
1.5.2 数量积的坐标表示及其计算	1 课时
1.6 解三角形	
1.6.1 余弦定理	1 课时
1.6.2 正弦定理	2 课时
1.6.3 解三角形应用举例	1 课时
1.7 平面向量的应用举例	2 课时
小结与复习	2 课时

Ⅱ. 教材内容分析与教学建议

1.1 向　量

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

1. 了解向量的实际背景，理解有向线段、向量、零向量、向量的模、相等向量、相反向量等基本概念及其特征.

2. 掌握向量的几何表示，会用字母表示向量，通过有向线段理解平面向量的基本要素和几何表示.

◆ 本节难点：

1. 明确向量与数量的联系与区别，能正确判断实际问题中的量是否为向量.

2. 能正确判断、推导和证明两个向量是否为相等向量或相反向量，培养思维的严谨性，提高逻辑推理和表达能力.

二、教材编写意图

平面向量作为刻画现实世界的一种重要数学模型，是《数学课标(2017 年版)》要求的必修内容之一. 根据课标要求，教材立足向量这一视角，在揭示平面向量的主体知识的同时，特别注重突出向量的几何直观作用，强调向量概念的几何意义与物理背景.

学生已经学习过许多的量，很多量用一个实数(加上单位)就能确切表达，比如质量、面积、距离等，而有些量仅仅用一个实数还不能确切表达它们，教材中以问题“大海航行中舵手为什么重要”“迷路为什么叫‘迷失方向’‘找不着北’”切入，说明方向在描述一些量中是重要的，引出位移就是既要用大小又要用方向来描述的量.

接着教材以研究物体运动时的位移变化为背景，抽象出向量的概念，即引入既有大小又有方向的量. 由用带箭头的线段表示位移受到启发，教材用有向线段直观表示向量，为了研究的方便，进而给出向量的模、相等向量、相反向量、零向量等概念.

三、教学建议

本小节包括两部分内容，首先从学生熟悉的物理学中的位移概念出发，给出了表示向量的有向线段及向量的概念，并进一步给出向量的两种表示方法：几何表示法及字母表示法. 为了研究的方便，接着从物理背景出发进一步给出相等向量、相反向量及零向量的概念.

1. 向量的物理背景

位移是物理学中的基本量之一，也是几何研究的重要对象. 几何中常用点表示位置，研究如何由已知点的位置确定另外一点的位置. 位移简明地表示了点的位置之间的相对关系，它是向量重要的物理模型. 教材在正文旁用“贴士”提出“大海航行中舵手为什么重要”“迷路为什么叫‘迷失方向’‘找不着北’”等问题，其目的是建立物理课中学过的位移、力等矢量概念与向量之间的联系，以此更加自然地引入向量概念，并建立学习向量的认知基础.

讲解位移，要把握三个方面：一是位移由方向和距离唯一确定；二是位移只与质点的起点、终点位置相关，而与实际运动路线无关；三是两个位移相等指的是方向相同而且大小相等.

2. 向量的基本要素及几何表示

教材以物理中的位移引出有向线段的概念，并进一步指出“像位移这样既有大小又有方向的量在数学中称为向量”. 有了向量的概念以后，应对向量的概念作出解释，我们不妨提出如下两个问题：

（1）数学中定义的向量与物理学中定义的矢量是否有区别？

（2）有向线段和向量有何异同？

物理学中的矢量(如位移)有三要素，即位置、大小和方向. 我们可以舍去其位置而只关注其大小和方向两个要素，这样的量我们称为自由向量.

有向线段有三要素，即起点、大小和方向，而自由向量却不关注其起点(起点可以是任意的)，显然两者是不同的概念. 但有向线段一定是向量，向量是用有向线段表示的，向量是对有向线段再抽象的结果，它舍去了有向线段位置方面的特性，而保留了方向和长度这两个特性. 每个向量是一类有相同方向和相等长度的有向线段的总称，或者说，向量是有向线段的一个等价类.

教材介绍了向量的两种表示：有向线段表示和在字母上方标箭头表示. 这两种表示方法都需要掌握. 向量用有向线段表示为用向量处理几何问题打下了基础，需要注意的是，在用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量时，要提醒学生注意向量$\overrightarrow{AB}$的方向是起点 A 指向终点 B，点 A 要写在点 B 的前面.

3. 向量的相等

数学中，引进一个新的量后，首先要考虑的是如何规定它的“相等”. 如何规定“相等向量”呢？由于向量涉及大小和方向，因此把“方向相同且长度相等的向量”规定为相等向量是非常自然的. 由向量相等的定义可以知道，对于一个向量，只要不改变它的方向和大小，就可以任意平行移动. 在教学中，需要提醒学生注意以下两点：

（1）向量的模相等是两向量相等的必要不充分条件，两向量的方向相同也是两向量相等的必要不充分条件；

（2）由于高中数学中讨论的向量是自由向量，因此表示任意两个相等向量的有向线段，虽然起点的具体位置可以不同，但它们的方向相同，长度相等.

用有向线段表示向量时，可以任意选取有向线段的起点，这将为用向量处理几何问题带来方便. 教学时可以借助信息技术，通过向量的平移来让学生直观认识相等的向量与表示向量的有向线段的起点无关. 还可以让学生思考“同一条有向线段可以表示怎样一类相等的向量”“同一个非零向量可以用怎样一类有向线段表示”这两个问题，也可以结合例题、习题体会上述问题的应用.

由相等向量的概念可以很自然地联想到“两个向量长度相等但方向相反”，从而引出相反向量的概念，并借助相反数的定义进行类比，再区分$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$的异同，学生就能较容易理解了.

4. 零向量

在讲解零向量时，可以先向学生提出一个问题：有没有模长为 0 的向量呢？一个质点经过移动又回到了起点，即起点与终点重合，显然其位移为 $\mathbf{0}$，即存在模长为 0 的向量. 由此可以看出，对任意一个点 A，向量 $\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$. 同时要提醒学生，“零向量的方向是不确定的”指的是任意方向都可以当成零向量的方向，这一点在后续讨论向量的关系时要用到.

关于零向量，教学时可以视情况决定是否补充如下辨析题.

判断下列命题的真假：

(1) 零向量是没有方向的；(假)

(2) 零向量是有方向的；(真)

(3) 零向量的方向是任意的；(真)

(4) 零向量是没有长度的；(假)

(5) 零向量的长度为 0.(真)

5. 例题的教学分析

例 1 结合正六边形的几何性质使学生进一步熟悉相等向量与相反向量的概念，是一道“识图题”. 正六边形是边长等于外接圆半径并且对边互相平行的正多边形. 它既是轴对称图形，又是中心对称图形，具有丰富的几何性质. 本题教学时可进行下列教学活动：

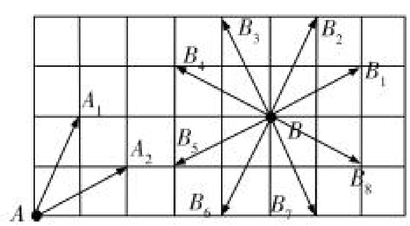
(1) 不仅能找到与 $\overrightarrow{FE}$ 相等的向量，而且能“读”出向量，比如向量 $\overrightarrow{BC}$；

(2) 能否在图形中标出其他满足条件的向量(以图中字母为起点或终点)？

例 2 旨在培养学生的动手能力，通过画出满足条件的有向线段，进一步熟悉向量的几何表示及相等向量、相反向量的概念.

★补充例题

例 1 如图所示是中国象棋的半个棋盘，“马走日”是马的走法，即马可以从 A 处跳到 A_1，也可以跳到 A_2 处，分别用向量 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{AA_2}$ 表示马“走了一步”. 试在图中画出马在 B 处“走了一步”的所有情况，并用向量表示.



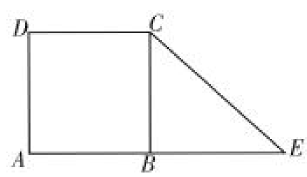
解： 如图，马在 B 处“走了一步”共有 8 种可能情况，用向量表示，分别为：

$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{BB_2}$，$\overrightarrow{BB_3}$，$\overrightarrow{BB_4}$，

$\overrightarrow{BB_5}$，$\overrightarrow{BB_6}$，$\overrightarrow{BB_7}$，$\overrightarrow{BB_8}$.

说明： 通过本例题加深对向量的大小及方向的理解.

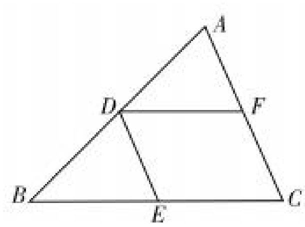
例 2 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$\triangle BCE$ 为等腰直角三角形. 以图中各点为起点和终点，写出与向量 $\overrightarrow{AB}$ 模相等的所有向量.



解： $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DC}$.

说明： 通过本例题加深对相等向量及相反向量的理解，进一步认识到向量的模相等与向量的方向没有关系.

例 3 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分别是 AB，BC，CA 边上的点，已知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$.



求证：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

证明： 因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，

则 D 为 AB 的中点.

因为$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$，

则 $DF /\!/ BE$，且 $DF=BE$，

所以 F 为 AC 的中点，E 为 BC 的中点，

所以 DE 为$\triangle ABC$ 的中位线，

所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

说明： 通过本例题加深对相等向量的理解，同时也进一步说明表示两个相等向量的有向线段，既可以在同一条直线上，也可以是平行的.

6. 相关链接

向量及向量符号的由来

向量又称为矢量，最初被应用于物理学. 很多物理量如力、速度、位移以及电场强度、磁感应强度等都是向量. 大约公元前 4 世纪，古希腊著名学者亚里士多德就知道了力可以表示成向量，两个力的组合作用可用著名的平行四边形法则来得到. “向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段. 最先使用有向线段表示向量的是英国科学家牛顿.

从数学发展史来看，历史上很长一段时间，空间的向量结构并未被数学家们所认识，直到 19 世纪末 20 世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量成为沟通代数与几何的桥梁.

向量能够进入数学并得到发展，首先应从复数的几何表示谈起. 科学家利用坐标平面上的点来表示复数 $a+b\mathrm{i}$，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算. 把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题. 人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样进入了数学.

但复数仅能用于表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找“三维复数”以及相应的运算体系. 19 世纪中期，英国数学家哈密顿(1805—1865)首先提出四元数的概念，以代表空间的向量. 他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础. 随后，电磁理论的奠基人——英国物理学家麦克斯韦把四元数的数量部分和向量部分分开处理，从而创造了向量分析.

三维向量分析的开创，以及同四元数的正式分裂发生在 19 世纪：有数学家提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数. 他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积. 并把向量代数推广到变向量的向量微积分. 从此，向量的方法被引入分析和解析几何中，并逐步完善，成为一套优良的数学工具.

中学讨论的向量是一种带几何性质的量，除零向量外，总可以画出箭头表示方向. 但是数学中还存在更广泛的向量. 例如，把所有实系数多项式的全体看成一个多项式空间，这里的多项式都可看成一个向量. 在这种情况下，要找出起点和终点甚至画出箭头表示方向是办不到的. 这种空间中的向量可以是任意数学对象或物理对象，这样就可以将线性代数方法应用到广阔的自然科学领域中去了. 因此，向量空间的概念，已成了数学中最基本的概念和线性代数的中心内容，它的理论和方法在自然科学的各领域中得到了广泛的应用. 而向量及其线性运算也为向量空间这一抽象概念提供了一个具体的模型.

19 世纪初，以$\overrightarrow{AB}$表示一个有向线段或向量. 数学家莫比乌斯则以$\overrightarrow{AB}$表示起点为 A，终点为 B 的向量，这种用法被数学家广泛接受. 另外，哈密顿等人则以小写希腊字母表示向量. 20 世纪以后，字母上加箭头表示向量的方法逐渐流行，尤其是在手写稿中. 为了方便印刷，用粗黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等表示向量，这两种符号一直沿用至今.

1.2　向量的加法

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

1. 从位移和力的合成了解向量加法的物理背景，掌握向量加法运算的三角形法则和平行四边形法则，理解零向量加法的性质，明确向量加法运算满足交换律和结合律.

2. 明确向量减法与向量加法的内在联系，掌握向量减法运算的三角形法则.

◆ **本节难点：**

1. 会利用向量加法运算法则作两个向量的和向量，用向量方法解决几何问题及实际问题.

2. 会利用向量减法运算法则作两个向量的差向量，渗透联系、转化和对立统一的辩证观点，培养变通思维能力.

二、教材编写意图

有了数只能进行计数，只有引入了运算，数的威力才得以充分展现. 类比数的运算，向量也能够进行运算. 运算引入后，向量的工具作用才能得到充分发挥. 实际上，引入一个新的量后，考察它的运算及运算律，是数学研究中的基本问题.

学生对于“运算”并不陌生，之前已经学习了数的运算、代数式的运算、集合的运算等，针对每一种代数运算无外乎要研究运算的背景、意义、法则、性质、应用等，从而建立相应的运算体系. 平面向量运算内容的编写关注了以下两个方面：一是引导学生从物理、几何、代数三个角度理解向量运算；二是引导学生类比数的运算研究向量的运算.

向量的加法运算可以通过类比数的加法，以位移的合成、力的合力等两个物理模型为背景引入. 这样既可以使加法运算的学习建立在学生已有的认知基础上，同时还可以提醒学生注意，在进行向量运算时，不但要考虑大小问题，还要考虑方向问题，从而使学生体会向量运算与数的运算的联系与区别.

平面向量的线性运算包括：向量加法、向量减法、向量数乘运算，以及它们之间的混合运算. 平面向量的线性运算中，加法运算是最基本、最重要的运算，减法运算、数乘向量运算都以加法运算为基础，减法运算、向量数乘运算都可以归结为加法运算，故教材将向量的加法与向量的减法单独编排为“1.2 向量的加法”，既突出了理解向量加法的重要性，又体现了两者间的联系.

三、教学建议

向量加法运算主要是向量加法的三角形法则和平行四边形法则. 教材从几何角度给出了通过三角形法则或平行四边形法则作两个向量和的方法. 教学时要注意向量加法的三角形法则和平行四边形法则所对应的物理模型，另外，使学生体会两种加法法则在本质上是一致的.

学生知道，数的运算满足一定的运算律，运算律可以有效地简化运算. 与数的运算律类比，提出“向量加法是否也有运算律”的问题是很自然的. 教学时，应通过探究引导学生类比数的加法交换律和结合律，通过画图验证向量加法的交换律和结合律.

类比数的运算也就想到向量加法的逆运算，教学时可引导学生用向量的加法来定义向量的减法.

1. 三角形法则

在向量加法的作图中，要让学生体会作法中在平面内任取一点 O 的依据——它体现了向量起点的任意性. 作图时，一般需要将向量进行平移. 用平行四边形法则作图时应强调向量的起点放在一起，而用三角形法则作图则应强调首尾相连.

教材中给出了向量加法的三角形法则，教学中需要提醒学生注意以下两点：

（1）利用三角形法则求向量的和向量时，需要通过向量的平移，让第一个向量的终点与第二个向量的始点重合，而且和向量是从第一个向量的始点指向第二个向量的终点.

（2）若两个向量方向相同或相反（以下简称共线），也可以用三角形法则中涉及的作图方法求它们的和向量，但此时构成不了三角形.

当然，上述内容的讲解要结合教材 P.6 图 1.2－2 和 P.7 图 1.2－3 进行，而且讲授过程中，最好能让学生自己动手作图，以培养学生的作图能力.

在教学时，还可补充向量加法的三角不等式，如(以下内容供参考)：

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向既不相同也不相反（以下简称不共线）时，根据三角形两边之差小于第三边，两边之和大于第三边，可得

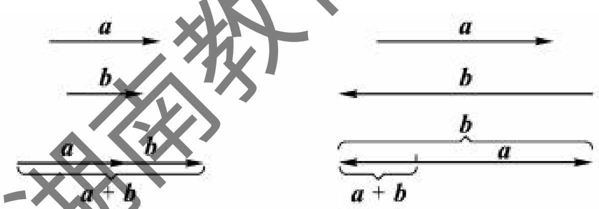
$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，

（1）如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个向量是零向量，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

（2）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量而且方向相同时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

（3）当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量而且方向相反时，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.



$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时　　　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时

2. 平行四边形法则

关于向量加法的平行四边形法则，教学中应提醒学生注意：

（1）该法则是求两个向量和的另外一种作图方法，实际作图时，需要将两个向量的始点平移到起点(使它们重合)，然后再作平行四边形.

（2）平行四边形法则适用于两个向量不共线的情形，这就是说，当两个向量共线时，不能用平行四边形法则得到它们的和，平行四边形法则具有一定的局限性.

（3）平行四边形法则揭示了两个不共线向量的和向量的一个几何意义.

教学时一方面应引导学生自己作图，另一方面应通过向量的平移等，说明向量加法的三角形法则与平行四边形法则本质上是一致的.

3. 加法的运算律

定义了一种运算，就要进一步认识它有怎样的运算性质. 定义了向量的加法后，一个自然的想法是要研究它有哪些运算规律.

向量的加法运算满足交换律，因为形式上与数的加法运算类似，所以看起来是比较简单的. 不过，

需要教师注意的是，要讲清楚交换律成立的理由并不容易，以下内容供参考.

当两个向量不共线时，从向量求和的平行四边形法则容易看出，不管是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 还是 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，和向量对应的是同一个平行四边形的同一条对角线，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

当两个向量共线时，

（1）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个向量是零向量，交换律显然成立.

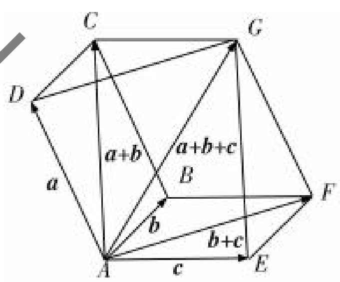
（2）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都为非零向量时，可分 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向和 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向两种情况讨论.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 又 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向也相同，且 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|$. 所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 的相同，大小也相等，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反时，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 大小相等，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 大小不相等，可假设 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$. 又 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 的方向与也与 $\boldsymbol{a}$ 的相同，且 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

向量加法的交换律，从位移的角度来理解也是可以的：结合教材图 1.2－6 可知，从点 A 出发移动到 B，使其产生位移 $\boldsymbol{a}$，接着再移动到 C，使其产生位移 $\boldsymbol{b}$ 与从点 A 出发先移动到 D，产生位移 $\boldsymbol{b}$，再移动到 C，产生位移 $\boldsymbol{a}$，都会到达同一终点. 这一实际情况也说明了向量加法的交换律成立.

需要说明的是，对于向量加法的结合律，教材中给出的方法运用了向量加法的三角形法则，在实际教学过程中也可能有学生运用向量加法的平行四边形法则，右图提供了一个验证思路，供教师参考. 教师还可以借助信息技术工具改变向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的位置，动态地帮助学生理解向量加法的结合律成立.



向量的加法满足交换律和结合律，所以有限个向量相加的结果是唯一的，我们可以任意调换两个向量的位置，也可以任意决定相加的顺序，例如

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}]=[(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}]+\boldsymbol{b}.$$

因此，以上运算均可以用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 来表示.

另外，为了得到有限个向量的和，只需将这些向量依次首尾相接，那么以第一个向量的起点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量，就是这些向量的和，其主要依据是向量加法的三角形法则和向量加法满足的运算律. 这里可以提醒学生，当首尾顺次相连的向量构成封闭的图形时，这些向量的和为 $\boldsymbol{0}$.

4. 零向量的加法性质

教材例 2(1)开门见山地提出问题“对任意向量 $\boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$”. 在前面已经得到结论“两个向量共线时，也可以用三角形法则中涉及的作图方法求它们的和向量”的基础上，不难理解，教学时可以先让学生画出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 这三个向量的图形，然后观察并说明合理性.

5. 向量的减法

（1）向量的减法运算与加法运算是对立统一的两种运算，是向量几何运算的主体内容，二者相互协调和补充. 类比数的运算，能由向量的加法运算自然地想到向量的减法运算，故教材 P.10 以“与数的减法一样，向量的减法同样作为向量加法的逆运算引入”开篇，既体现类比的思想，又自然地过渡到向量的减法内容的学习.

教学时，可以以此提出问题：

①向量是否有减法？

②向量进行减法运算，得到的是一个什么量？

③如何理解向量的减法?

④向量的加法运算有平行四边形法则和三角形法则，那么向量的减法是否也有类似的法则?

(2) 教材中实质上给出了向量减法的两种定义方法，一种是利用加法的逆运算，另一种是借助相反向量将减法转化成加法. 教材给出两种定义的目的是从数和形两个方面来理解，实际上，这两种定义方法没有本质区别.

(3) 建议学习时结合图形演示向量减法的各种情况，分析$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$的代数特点. 可总结如下规律：从右往左看，等式右边的两个向量始点相同，而左边的向量相当于消去这个点，而且调换了终点字母出现的顺序；从左往右看，相当于引入一个新的字母，而且引入的这个新字母是任意的，例如，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$.

(4) 教材 P. 10 给出了点的位置向量的定义，并进一步引出$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$的物理意义，能帮助学生更好理解，教学中可结合生活实例说明.

(5) 教材中未对两个向量共线这种特殊情况进行说明，建议教学中引导学生作图，然后归纳说明无论两个向量是否共线，向量减法法则都是适用的.

6. 例题的教学分析

例 1 将相等向量知识与交换律进行结合运用，比较简单，教学时可以让学生自己动手做，教师可提醒回顾有关知识.

例 2 对零向量的加法及其有关性质进行了说明，也是对向量运算法则“负负得正”的一个几何解释.

例 3 旨在让学生熟练向量加法的运算律及相反向量等知识，将某一向量表示为其他向量的和或差，这是运用向量证明几何问题的基础.

例 4 其中的三个力的方向不同但大小相同，一般可以先选取其中两个力求其合力，它们遵循力合成的平行四边形法则，是学生熟悉的物理学背景.

例 5 其解析从向量旋转的角度出发，这种解法让人耳目一新，也为后续学习“复数的三角表示”奠定了基础. 实际上，向量的几何方法与代数方法研究几何问题的思路是完全一致的，在将几何问题用向量表示时，不得不提一个重要的数学观点——“对应”的思想. 本题就是从“对应”的角度来思考，和向量 $\boldsymbol{s}$ 旋转 120°之后仍和自身对应，由于向量是有方向的，所以只有 $\boldsymbol{0}$ 才能满足.

例 6 是用两个向量表示几何图形中的其他向量，这是向量证明几何问题的基础. 教学中要注意这方面的训练，让学生掌握用向量表示平行四边形的四条边和两条对角线的关系.

讲解完例 6 以后，教师可以考虑补充如下例题，让学生熟练字母表示向量的运算.

化简下列各式：

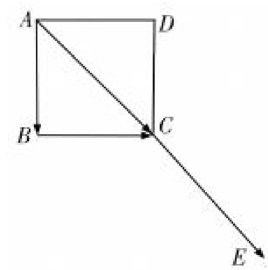
(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$；(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}$；(3) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

例 7 作两个向量的差时，要结合向量减法的几何意义，注意差向量的方向，即箭头不要搞错了，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的箭头要指向向量 $\boldsymbol{a}$，如果指向向量 $\boldsymbol{b}$，则表示 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 本题还可以先作出向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，然后由三角形法则或平行四边形法则求两向量的和.

★补充例题

例 1 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，并求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

解： 延长 AC 到 E，使 $CE=AC$，则$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}$.



所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

因为正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$.

说明：通过本例题作两向量的和向量，熟悉共线与不共线两种情形的作法，加深对向量的模的概念的理解.

例 2　点 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

证明：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})\\&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})\\&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.\end{aligned}$$

说明：本题是平行四边形中与向量有关的一条结论，点 O 既可以是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，也可以是平面内任意一点. 通过本题可以让学生进一步熟悉用向量证明几何问题的方法，教学时可以借助软件制作点 O 的动画，展示变化过程中的不变量，揭示问题的本质.

例 3　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=13$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，求 $|\boldsymbol{b}|$.

解：设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

则四边形 $OACB$ 为平行四边形，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

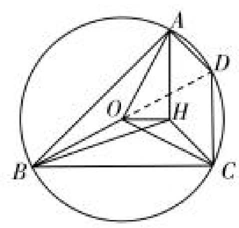
因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=13$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=13$，

所以四边形 $OACB$ 为矩形.

又 $|\overrightarrow{OA}|=5$，所以 $|\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

说明：通过本例题培养学生的作图能力，考查结合向量与初中平面几何知识综合解决问题的能力.

例 4　如图，O 为△ABC 的外心，H 为垂心，求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.



解：如图，作直径 BD. 因 $AD\perp AB$，H 为垂心，所以 $AD\,/\!/\,HC$.

同理 $AH\,/\!/\,DC$，所以四边形 $AHCD$ 是平行四边形，

所以 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

说明：本例题是引导学生用向量的方法来解释说明平面几何性质. 通常用向量法研究几何，是指将点、线、面等几何要素及其关系转化为向量间的关系，从而借助向量运算对它们进行研究，然后将这些运算的结果再译成关于点、线、面的相应几何表示. 本题求解时要抓住三角形垂心的几何特征，并思考如何从向量表示的角度来描述，可结合教材 P. 13 第 10 题一起讲解.

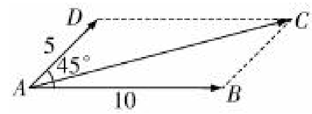
7. 相关链接

矢量加法的两个法则

一、平行四边形法则

求两个不共线的共点力的合力，可以用表示这两个力的线段为邻边作平行四边形，这两条邻边的对角线就表示合力的大小和方向，这种方法叫作“力的平行四边形法则”.

我们知道，加、减、乘、除运算是用来计算两个以上的标量的，如质量、面积、时间等. 例如，求密度就要用体积除以质量. 标量之间的运算只需要单位一致. 但是，矢量相加就要用特别的方法，因为被加的量既有一定的数值，又有一定的方向，相加时两者要同时考虑.

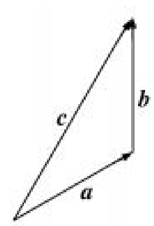


如图，以纸面上某点 A 为出发点作矢量$\overrightarrow{AB}$，代表向东 10 km，然后在 A 点东北方作$\overrightarrow{AD}$使其模长为 5 km. 过点 B 作 BC 平行于 AD，过点 D 作 DC 平行于 AB，得到平行四边形 $ABCD$. 从点 A 向点 C 作射线 $\overrightarrow{AC}$，这就是总位移矢量.

应注意点 A 不是受 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$三个力的作用，而$\overrightarrow{AC}$是代替$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$的共同作用，而不是作用在物体上的第三个力.

一个矢量，只要遵守平行四边形法则，可以分解为两个，或无穷个. 但是矢量的合成不同，两个矢量只能合成为一个矢量.

二、三角形法则



矢量相加的另一个法则是三角形法则. 如图，矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和是将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 首尾相接. 例如，将矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点相接，此时以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和. 根据矢量相加的三角形法则求得的矢量和与两矢量的求和次序无关.

例如，有一艘船，由湖中 A 点先向正北方向航行6 km到达 B 点，然后航向转了 $90°$，向东再航行 4 km 到达 C 点.

如果问船在什么地方，离出发点有多远，方位如何，也就是说，我们要求船的总位移，那么就不能用简单的标量加法去计算了. 矢量加法就要用几何作图法，其详细步骤如下：在纸上先画一条直线 AB，在 B 端加一箭头，代表向北走了 6 km，再由 B 向右画一横线 BC 垂直于 AB，在 C 端加箭头以表示向东的位移为 4 km. 最后，把始点 A 和终点 C 连起来，加箭头于 C 端，这就是总的位移矢量. 我们说，向北的位移 $\overrightarrow{AB}$加上向东的位移 $\overrightarrow{BC}$等于总位移 $\overrightarrow{AC}$，用矢量形式表示为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，或用黑体字母记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

矢量的加法有两种：三角形法则和平行四边形法则，它们本质上是一样的. 若用三角形法则求总位移似乎更直观一些，而用平行四边形法则求力的合成则更容易理解.

1.3　向量的数乘

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

1. 理解向量数乘运算的几何意义，掌握向量数乘的运算律，以及向量共线的充要条件.

2. 掌握单位向量、向量的夹角等概念.

◆ 本节难点：

1. 理解数乘运算的基本性质.

2. 从特殊到一般，培养类比、归纳等思维能力和探索能力，加强向量的综合运算，深化数形结合思想，提高逻辑推理能力.

二、教材编写意图

实数与向量的积是向量的一种线性运算，安排在向量的加、减运算之后，顺理成章. 教材 P. 14 把平面内的“某个向量”类比为“一把尺子”，提出问题“能用这把向量尺子去度量平面上的所有向量吗”，比喻形象贴切，能引发学生展开联想与思考，并进一步引出对向量的数乘的学习. 向量的数乘，类似于实数乘法，但二者毕竟不同，教材从研究两个相同向量 $\boldsymbol{a}$ 的和入手，说明其几何意义，并在此基础上抽象概括出向量数乘的概念. 定义了向量数乘之后，根据数学知识的内在联系，自然导出对共线向量及数乘运算律的研究.

本节通过与数及其运算的类比，建立相关知识的联系，突出思想性. 特别值得注意的是，应引导学生通过与数及其运算的类比，体会研究向量的基本思路，引导学生反思、概括研究思路，使学生体会数学中研究问题的思想方法，从而不断提升学生的数学思维水平.

三、教学建议

1. 向量的实数倍

教材引导学生先作出两个相同向量的和，再讨论它们的几何意义，从而得到向量数乘运算的直观感知，然后再过渡到一般的向量数乘运算的定义，符合学生的认知规律. 教学时要强调：$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，$\lambda\boldsymbol{a}$ 也有长度和方向，其长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向与 λ 的符号有关. 当 $\lambda\neq 0$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 可以进行细化说明，例如：

(1) 若 $0<\lambda<1$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模比 $\boldsymbol{a}$ 的小，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；

(2) 若 $\lambda=1$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相等；

(3) 若 $\lambda>1$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模比 $\boldsymbol{a}$ 的大，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；

(4) 若 $-1<\lambda<0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模比 $\boldsymbol{a}$ 的小，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；

(5) 若 $\lambda=-1$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量；

(6) 若 $\lambda<-1$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模比 $\boldsymbol{a}$ 的大，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

以上内容的探讨，要注意渗透类比、分类讨论以及数形结合的思想等，还要注意运用向量的直观形

象，加深学生对数乘向量的理解与认识.

2. 共线向量

任何一组平行向量都可以平移(不改变大小和方向)到同一直线上，因此平行向量与共线向量是等价的，这一点值得特别注意，还要注意平行向量与平行线段的区别. 共线向量和平行向量是研究向量的基础，因此可以将一组平行向量平移到一条直线上，这给问题的研究带来方便. 教学中，要使学生体会两个共线向量并不一定要在一条直线上，只要两个向量平行就是共线向量. 当然，在同一直线上的向量也是平行向量. 要避免向量的平行、共线与平面几何中直线、线段的平行和共线相混淆，教学中可以通过对具体例子的辨析来正确掌握.

教材 P. 15 将向量平行的充要条件等价为：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 这样能避免将零向量与任意向量共线分别说明，但在教学中应注意将这一结论阐述清楚，即

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数 $\lambda=0$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数 $\lambda=0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$任意实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

为方便记忆和称呼，可以将这一定理称为“共线向量定理”.

两个向量是否共线，也可从它们的夹角来判断，接下来很自然地过渡到两向量夹角的讨论. 对两个非零向量的夹角，教材 P. 16 是通过图形来定义的，教学时应注意强调 O 点的选取是任意的，同时还应将两非零向量的起点平移到同一点才能判断.

由于零向量的方向是任意的，故要对零向量与其他非零向量的夹角作出规定. 为避免今后学习向量垂直、向量的数量积等知识时，因没有对零向量的夹角给出说明而不便统一定义，教材 P. 16 特别规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角既可以看成是 0，也可以看成是 $\frac{\pi}{2}$. 当规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是 0 时，$\boldsymbol{0}$ 与任一向量平行；当规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ 时，零向量与任一向量垂直.

在某些教材中，对垂直的界定只限于非零向量而回避了零向量，从而导致部分教师认为判断向量垂直的命题时还要考虑是否非零，反而会让学生觉得向量很“玄乎”，为以后处理高等数学问题带来逻辑上的麻烦. 所以，教师要注意这点.

教材通过例 3 来引导学生用向量的观点来重新认识初中学过的数轴，将数轴上的实数与向量建立起一一对应关系. 这一点特别重要，今后学生会明白，如果点的位置不能用数值来表示，要使用现代的计算机技术研究图形的性质是不可能的. 这里奠定了向量的数量化基础，以后要把向量都数量化、代数化.

3. 数乘运算律

引入向量数乘运算后，考察这种运算的运算律是一个自然的问题. 与实数乘法的运算律类似，向量数乘也有“结合律”“分配律”，只是要注意其中的因子是向量，等式证明的依据是相等向量的定义，即要证明等式两边的向量的模相等，且方向相同. 为了证明这些运算律在任何情况下都成立，需对各种可能的情况进行讨论，下面的证明供教师参考.

对实数乘法的结合律　$x(y\boldsymbol{a})=(xy)\boldsymbol{a}$.　　①

对实数加法的分配律　$(x+y)\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}$.　　②

证明：(1) 如果 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则①式显然成立.

如果 $x\neq0$，$y\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则根据向量数乘的定义有

$|x(y\boldsymbol{a})|=|x||y\boldsymbol{a}|=|x||y||\boldsymbol{a}|$，$|(xy)\boldsymbol{a}|=|xy||\boldsymbol{a}|=|x||y||\boldsymbol{a}|$，

所以 $|x(y\boldsymbol{a})|=|(xy)\boldsymbol{a}|$.

如果 x，y 同号，则①式两边的向量都与 $\boldsymbol{a}$ 同向；

如果 x，y 异号，则①式两边的向量都与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

因此，向量 $x(y\boldsymbol{a})$ 与 $(xy)\boldsymbol{a}$ 有相等的模和相同的方向，所以这两个向量相等.

(2) 如果 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则②式显然成立.

如果 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，可分如下两种情况：

当 x，y 同号时，则 $x\boldsymbol{a}$ 和 $y\boldsymbol{a}$ 同向，所以 $|(x+y)\boldsymbol{a}|=|x+y||\boldsymbol{a}|=(|x|+|y|)|\boldsymbol{a}|$，

$|x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}|=|x\boldsymbol{a}|+|y\boldsymbol{a}|=|x||\boldsymbol{a}|+|y||\boldsymbol{a}|=(|x|+|y|)|\boldsymbol{a}|$，

即有 $|(x+y)\boldsymbol{a}|=|x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}|$.

由 x，y 同号，知②式两边的向量或都与 $\boldsymbol{a}$ 同向，或都与 $\boldsymbol{a}$ 反向，即②式两边向量的方向相同.

因此，②式成立.

如果 x，y 异号，当 $x>y$ 时，②式两边向量的方向都与 $x\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $x<y$ 时，②式两边向量的方向都与 $y\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

类似可证 $|(x+y)\boldsymbol{a}|=|x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}|$，因此②式也成立.

4. 例题的教学分析

例 1 旨在让学生体会在给出向量数乘的定义后，通过几何图形直观感知数乘向量与原向量的大小与方向的关系，为接下来给出共线向量的定义做铺垫.

例 2 用于培养学生将文字语言用符号语言来表示的能力. 本题答案不唯一，可以引导学生充分发表意见，也可以给出符号语言，让学生用文字语言来描述.

例 3 是简单的数学应用题，学生结合图形可以较快得出答案. 设计该题的目的是让学生类比正负数加法的运算来理解共线向量的运算，本题的价值在于类比思想的运用，也为教材 P. 17 说明实数与共线向量之间可以建立起一一对应关系列举实例. 学习知识的过程，是已有认知结构重新建构的一个过程，当新的认知进入大脑时，如果能够将原有认知结构纳入新的认知结构，就会产生正向迁移.

例 4 给出了利用向量共线判断三点共线的方法，这是判断三点共线常用的方法. 教学中可以先让学生作图，通过观察图形得到 A，B，C 三点共线的猜想，再将平面几何中判断三点共线的方法转化为用共线向量证明三点共线. 本题只要引导学生理清思路即可，同时可以提醒学生的是，判断 A，B，C 三点是否共线，只需判断 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$ 中有两个向量共线即可.

本题也是一个很好地与信息技术整合的题材，教学中可以通过计算机作图，进行动态演示，揭示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 变化过程中，A，B，C 三点始终在同一条直线上的规律.

例 5 是向量线性运算的综合应用，(1) 得到 P 为线段 AB 中点的充要条件，(2) 得到 G 为 $\triangle ABC$ 重心的充要条件，这样处理能促进学生数学素养的综合提升. 这两个结论是高中阶段平面向量中的重要内容之一，要提醒学生重视. 教学时还可提出如下问题：

①设向量 $\overrightarrow{OC}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}$，若 A，B，C 三点共线，则实数 x，y 应满足什么关系？

②若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，x，y 为实数，则 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的等价条件是什么？

③设 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，若 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$，则点 M 在什么位置？

★补充例题

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

(1) 判断 A，B，D 三点是否共线；

(2) 若$\overrightarrow{AC}$//$\overrightarrow{DE}$，求实数 k 的值.

解：(1) 因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}-10\boldsymbol{b}=5\overrightarrow{AB}$，所以 A，B，D 三点共线.

(2) 因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，设$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}$，则 $3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，

即$(\lambda-3)\boldsymbol{a}+(\lambda k-6)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\lambda-3=0$ 且 $\lambda k-6=0$，

解得 $k=2$.

说明：本题是教材例 4 的变式与提升，(1)小题将问题设置为开放性问题，难度略为增大，但解法与例 4 相同，(2)小题由共线向量求参数的取值，考查两向量共线的充要条件.

例 2 在△AOB 中，C 为 AB 的中点，D 为 OC 的中点，过点 D 的动直线分别与 OA，OB 边相交于 E，F 两点. 设$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=y\overrightarrow{OB}$，判断$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$是否为定值.

解：$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{4x}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{4y}\overrightarrow{OF}$.

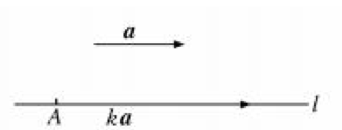
因为 D，E，F 三点共线，设$\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}=\lambda(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE})$.

故$\overrightarrow{OD}=(1-\lambda)\overrightarrow{OE}+\lambda\overrightarrow{OF}$，则$\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}=1$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ 为定值.

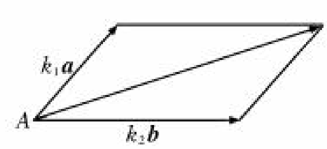
说明：本题旨在进一步提升学生综合运用共线向量充要条件解决问题的能力，可结合上面补充的相关结论进行讲解，能深化数形结合思想，提高逻辑推理能力.

5. 相关链接

向量的几何价值



用向量表示几何元素(点、直线、平面)很容易，并且很直接. 选一个定点，那么，任何一个点都可以用一个向量来表示. 对于一条直线 l，如果我们的兴趣只在于它的方向，那么用一个与直线 l 平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 就可以表示 l. 如果想确定直线 l 的位置，则还要在 l 上任选一点 A，这样，一个点 A，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 就确定了直线 l(如右图所示). 这是对直线 l 的一种定性刻画. 如果想具体地表示 l 上的每一个点，我们需要实数 k 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $k\boldsymbol{a}$. 这时，l 上的任意一点 x 都可以通过点 A 和某个 $k\boldsymbol{a}$ 来表示. 希望在“实际”上控制直线 l，可以看作是引入 $k\boldsymbol{a}$ 的一个原因.



两条相交直线确定一个平面 α，因而一个定点，两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 便在“原则”上确定了平面 α. 这是对平面的一种定性刻画. 但在讨论几何问题时，常常涉及平面 α 上的某一点 x，为了具体地表示它，我们需要引入向量的加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这时，平面 α 上的点 x 就可以表示为 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$(以及定点 A，如右图所示).

在解决几何问题时，这种表示能发挥很重要的作用. 虽然向量的加法、向量数乘有坚实的物理背景，但如果从纯数学的角度来看问题的话，上述考虑可使我们看到引进相应向量运算的理由，使我们更容易接受并喜爱向量运算.

1.4　向量的分解与坐标表示

一、教学重点与难点

◆ 本节重点:

1. 了解平面向量基本定理的形成过程及内容，会用此定理解决简单的问题.
2. 掌握向量正交分解的含义，明确任何一个向量都可以用两个不共线的向量来表示.
3. 掌握平面向量的和、差与向量数乘的坐标运算，以及共线向量的坐标表示.

◆ 本节难点:

1. 平面向量基本定理中关于基的线性表示的唯一性和存在性的理解.
2. 向量坐标运算的理论依据和数学意义.

二、教材编写意图

平面向量基本定理是平面向量这一章的重要内容之一，有着承上启下的特殊地位，定理是在学习了向量加法、减法和数乘这三种运算的基础上，承接向量共线定理而提出的，为平面向量的正交分解和坐标表示奠定了理论基础.

平面向量基本定理告诉我们，同一平面内任一向量都可表示为两个不共线向量的线性组合. 这样，如果将平面内向量的始点放在一起，那么由平面向量基本定理可知，平面内的任意一点都可以由两个不共线的向量表示，这是引进平面向量基本定理的一个原因.

三、教学建议

平面向量基本定理揭示了平面内任一向量与两个不共线向量之间的联系，给学生结构上的认识，同时建立平面向量与有序数对的对应，引出平面向量的坐标表示，在上述基础上研究平面向量运算的坐标表示，就把向量运算转化为数量运算.

在本节内容的教学过程中，应突出平面向量基本定理、平面向量的坐标表示及平面向量运算的坐标表示等重点内容，突破平面向量基本定理存在性和唯一性的证明难点，有助于提升学生的数学运算与逻辑推理素养.

1.4.1　向量分解及坐标表示

平面向量基本定理是平面向量中的重要内容，此定理表明平面内的任一向量可以由同一平面内的两个取定的不共线向量表示，而且表示式是唯一的. 因而向量的运算可以归结为两个取定的不共线向量的运算，这给利用向量运算解决问题带来了方便. 此定理还可引出向量的坐标的概念，进而引出向量运算的坐标表示.

1. 平面向量基本定理的引入

平面向量基本定理告诉我们，同一平面内任一向量都可表示为两个取定的不共线向量的线性组合，这是引进平面向量基本定理的一个原因. 其实，我们在上节的相关链接“向量的几何价值”中就已介绍了其中的思想.

相应地，一个定点，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 便给出直线 l 的“坐标系”；而一个定点，两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，就给出了平面 α 的一个“坐标系”. 类似地，空间的一个“坐标系”可以由一个定点，三个不共面的向量来给出. 在这样的“坐标系”中，几何元素及其关系就可以定量地表示. 另外，我们可以根据问题的具体条件，根据解决问题的需要选择“坐标系”，也可以在同一个平面上选择多个“坐标系”.

教材在上节介绍了向量的数乘运算，由两个向量共线的充要条件得出：位于同一直线上的向量可以由位于这条直线上的一个非零向量作为“尺子”来度量. 类比这个结论，本节首先研究平面内任一向量是否可以由同一平面内的两个不共线向量作为“尺子”来度量. 受力的分解的启发，教材从将一个向量分解为两个向量来入手研究上述问题.

2. 平面向量基本定理的证明

在讲解平面向量基本定理时，需要把握好以下两个方面的内容：

一是存在性，即存在实数 x，y，对平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$，都有 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$；

二是唯一性，即对于任意向量 $\boldsymbol{v}$，存在唯一一对实数 x，y，使得 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

找到实数对(x, y)的过程，即是对定理“存在性”的证明过程，其依据是向量加法的平行四边形法则及共线向量基本定理. 在教学中，可针对学生的情况多举些实例，比如可以借助物理学中力的合成与分解、运动的合成与分解等加深学生对平面向量基本定理的理解.

(1) 为加深学生对定理“存在性”的理解，可以引导学生按照如下步骤思考：

第一步，判断所给向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是否共线，如果共线，则由共线向量基本定理写出对应的表达式，否则转到下一步；

第二步，以所给向量为平行四边形的一条对角线，在 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 所在直线上作邻边，然后作出平行四边形；

第三步，判断所给向量分量的方向与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向的关系(同向或反向)；

第四步，判断所给向量分量的模与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的模之间的关系(倍数)；

第五步，综合上述信息，根据平面向量基本定理写出答案.

(2)“唯一性”的证明有一定的难度，证明的过程中还用到了反证法，且最后矛盾与共线向量定理有关. 可以向学生讲述这是从共线到共面后回到共线的思维过程，体现了从“低维推广到高维、高维问题向低维问题转化”的思想，有助于加深学生对定理本质的认识.

为了使学生更好地理解平面向量基本定理，教学中还可以用几何软件作图，然后改变向量的方向及模的大小，引导学生观察 x，y 取不同值时的图形特征.

在讲解平面上一组基的概念时，应注意强调：

(1) 平面内任意两个不共线的向量都可以作为一组基，但应尽量选取有利于解决问题的一组基.

(2) 借助平面向量基本定理，可以将平面内任意多个向量的问题，转化为两个特定的不共线向量的问题，这也是学习平面向量基本定理的原因之一.

(3) 平面上的向量可以有不同的基，而且同一个非零向量在不同基下的分解式可能不同.

3. 平面向量的正交分解与坐标表示

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的特殊情形，向量的正交分解是向量的分解中常用且重要

的一种. 因此在平面上，如果选取互相垂直的向量作为基，会给研究带来方便.

由点在直角坐标系的表示得到启发，要在平面直角坐标系中表示一个向量，最方便的是分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为基，这时，对于平面直角坐标系内的一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由平面向量基本定理可知，存在唯一一对实数 x，y，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.

平面内的任一向量 $\boldsymbol{v}$ 都可由 x，y 唯一确定，而有序实数对 $(x，y)$ 正好是向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点坐标，这样的“巧合”使平面直角坐标系的向量与坐标建立起了一一对应关系，从而使向量可以进行“量化”表示，从而使用向量工具时可以实现“有效能算”的思想.

关于平面向量的坐标，教学时可以向学生强调：点的坐标与向量的坐标既有区别又有联系，点的坐标表示的是点在平面直角坐标系中的位置，而向量的坐标表示的是向量的大小和方向，其与向量的终点和始点的相对位置有关；点 $A(x，y)$ 不能写成 $A=(x，y)$，向量 $\boldsymbol{a}=(x，y)$ 不能写成 $\boldsymbol{a}(x，y)$.

4. 例题的教学分析

例 1　是平面向量基本定理的具体应用，因为向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，向量 $\overrightarrow{OA}$ 可以用它们来表示，本题可以让学生作图后再思考.

例 2　实质上是运用平面向量基本定理，将向量进行正交分解，从而得到向量在基下的坐标.

例 3　结合三角函数的定义写出向量的坐标，体现知识之间的内在联系. 任何非零向量都可以写成 $(r\cos\alpha，r\sin\alpha)$，其中 r 是向量的模，α 是由 Ox 方向旋转至向量 $\boldsymbol{v}$ 的角，也称为 $\boldsymbol{v}$ 的方向角.

三角形与三角函数运算中不少重要的问题，都可借助向量方法解决，所以向量分析方法对于解三角形与三角函数运算是一种简洁明快的方法. 今后运用这一结论解题，与传统的几何方法相比，不仅程序简洁，而且理论上也很严谨，是培养学生逻辑思维能力的有效途径.

例 4　解答的关键是用基底 $\{\boldsymbol{i}，\boldsymbol{j}\}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$. 教材给出的方法是按 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 的方向分解，得到 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}$，再用 $\boldsymbol{i}$ 表示 $\overrightarrow{AA_1}$，用 $\boldsymbol{j}$ 表示 $\overrightarrow{AA_2}$，从而用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，得到 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 类似地，可以用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，得到 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的坐标.

还可以利用向量的坐标与点的坐标之间的联系解决这个问题：作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则点 M 的坐标就是 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，用同样的方法，可以得到 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的坐标.

例 5　旨在说明向量的加法运算可以分解为同一组基下的两向量和的加法运算. 讲解本题时，还可进一步说明，在同一组基下，向量的线性运算可以用给定基下的坐标表示. 当给定的是一组标准正交基时，则可在不加以说明的情况下，用这组坐标表示向量，为下一讲做铺垫.

★补充例题

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，点 M，N 分别在 BC，AC 上，且 $\overrightarrow{CM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$，试求向量 $\overrightarrow{MN}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标.

解：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

因此向量 $\overrightarrow{MN}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{2}\right)$.

说明：通过本例题进一步让学生体会到，给定平面上一组基 $\{\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2\}$，可以将平面上的任何一个向量都分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍的和，将向量用给定的一组基表示，常用方法有几何分解法、方程法、待

定系数法等，解题中应根据背景图形适当选取解法.

例 2 在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E，F 分别是 AD，BC 的中点，$BC=3AD$，设$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{e}_2$. 求证：向量$\overrightarrow{EF}$与 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 共线.

证明：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$=-\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{3}(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2),$$

所以向量$\overrightarrow{EF}$与 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 共线.

说明：本题的证明首先要将向量$\overrightarrow{EF}$用给定的一组基$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$表示，同时结合向量共线定理，说明两者之间的关系.

例 3 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解：作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由已知，得 $OA=1$，$OB=\sqrt{2}$，$OA\perp AB$，所以 $AB=1$，从而$\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，所以$\angle AOB=45°$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $45°$.

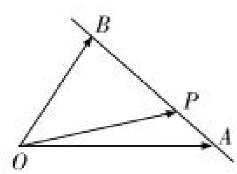
说明：本题旨在训练学生将数学文字语言和符号语言转化为图形语言的能力，能有效培养学生的数学建模素养. 但要注意的是，并不是所有类似问题都可建立几何模型来求解，本题是由于有“垂直”这一特殊位置关系，故可转化为直角三角形的边角问题. 通过本题可知，解决向量问题不仅可以通过代数运算，而且也可转化为几何问题求解.

5. 相关链接

平面向量基本定理与等和线

一、三点共线定理

已知平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，若$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，则 A，B，P 三点共线的充要条件是$\lambda_1+\lambda_2=1$.



证明：(充分性）若 $\lambda_1+\lambda_2=1$，则$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}$.

即$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\lambda_1(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\Rightarrow\overrightarrow{BP}=\lambda_1\overrightarrow{BA}$，故 A，B，P 三点共线.

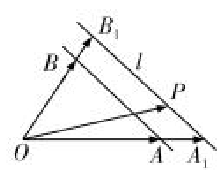
(必要性)若 A，B，P 三点共线，则 BP 与 BA 共线，即存在实数 μ 使得

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\mu(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\mu\overrightarrow{OA}+(1-\mu)\overrightarrow{OB}$.

令 $\lambda_1=\mu$，$\lambda_2=1-\mu$，则$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

二、等和线

如图，平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，作直线 $l\parallel AB$，直线 l 与直线 OA，OB 分别交于 A_1，B_1. 设$\overrightarrow{OA_1}=k\overrightarrow{OA}(k\in\mathbf{R})$，则$\overrightarrow{OB_1}=k\overrightarrow{OB}$. 设 P 为直线 l 上任意一点，若$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，则由 A_1，B_1，P 三点共线得



$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA_1}+(1-t)\overrightarrow{OB_1}=tk\overrightarrow{OA}+(1-t)k\overrightarrow{OB},$$

故 $\lambda_1=tk$，$\lambda_2=(1-t)k\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2=k$.

即 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值 k 与 P 在直线 l 上的位置无关，只与直线 l 和直线 AB 的相对位置有关.

即对于直线 l 上任意一点 P，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为基底的向量$\overrightarrow{OP}$的基底系数和为定值.

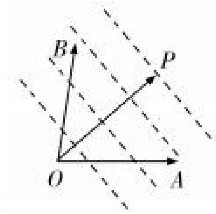
反之，对于任意两个向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_1}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP_2}=\mu_1\overrightarrow{OA}+\mu_2\overrightarrow{OB}$.

若$\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2$，则$\mu_2-\lambda_2=-(\mu_1-\lambda_1)$，从而

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(\mu_1-\lambda_1)\overrightarrow{OA}+(\mu_2-\lambda_2)\overrightarrow{OB}=(\mu_1-\lambda_1)\overrightarrow{BA}$，

所以$\overrightarrow{P_1P_2}/\!/\overrightarrow{BA}$，从而得证.

三、平面向量基底系数的等和线定理



已知平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，若点 P 在直线 AB 上或与 AB 平行的直线上，则$\lambda_1+\lambda_2=k$（定值），反之也成立.

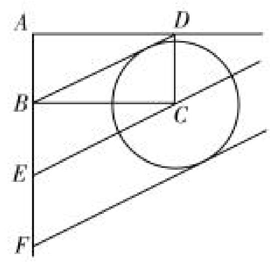
我们把直线 AB 以及与 AB 平行的直线 l 称为基底系数等和线. 且根据证明过程可知：

(1)当等和线为直线 AB 时，$k=1$，当等和线过 O 点时，$k=0$.

(2)当等和线在 O 点与 AB 之间时，$0<k<1$，当 AB 在 O 点与等和线之间时，$k>1$.

(3)由相反向量知，若两等和线关于 O 点对称，则相应定值互为相反数，且以上定值的变化与等和线到 O 点的距离成正比.

四、等和线的应用



在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda+\mu$的最大值为（　　）

A. 3　　　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$　　　　D. 2

解：如图，由平面向量基底系数的等和线定理可知，当等和线 l 与圆相切时，$\lambda+\mu$ 最大，此时$\lambda+\mu=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AB+BE+EF}{AB}=\dfrac{3AB}{AB}=3$，故选 A.

1.4.2　向量线性运算的坐标表示

向量的坐标表示，实际是向量的代数表示，引入向量的坐标表示可使向量运算完全代数化，将数与形紧密结合起来，从而将很多几何问题的解答转化成学生熟知的数量运算.

本节主要是运用向量线性运算的交换律、结合律、分配律，推导两个向量的和的坐标、差的坐标以及数乘的坐标运算，推导的关键是灵活运用向量线性运算的交换律、结合律和分配律.

1. 向量线性运算的坐标表示

研究平面向量加、减运算的坐标表示，可以引导学生自主探究完成，推导得到向量线性运算的坐标表示后，可以尝试让学生将自然语言与符号语言进行相互转化，提高学生数学抽象的能力.

根据起点和终点坐标写向量坐标是通过向量的减法运算得到的，由此不但可以建立向量的坐标与点的坐标之间的联系，还可以通过求向量$\overrightarrow{PQ}$的模而得到直角坐标系内两点间的距离公式. 这部分内容的教学，还应注意强调要与两向量差的坐标运算区别开来.

在向量减法坐标运算的基础上，可以进一步得到结论：两向量相等的一个充要条件是它们的坐标相等，这可以用符号表示为当$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$时，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$. 可以提醒学生，相等向量的坐标相同，但始点和终点的坐标可以不同.

2. 平面向量共线的坐标表示

引进向量的坐标表示后，向量的线性运算可以通过坐标运算来实现. 一个自然的想法是向量的某些关系，特别是向量的平行、垂直，是否也能通过坐标来研究呢？前面已经找出两个向量共线的条件，故进一步把向量共线的条件转化为坐标表示，这种转化是比较容易的，只要将向量用坐标表示出来，再运用向量相等的条件就可以得出平面向量共线的坐标表示. 要注意的是，向量的共线与向量的平行是一致的.

3. 例题的教学分析

例 6 已知平行四边形三个顶点的坐标，求第四个顶点的坐标. 教材 P. 27 给出的解法是先求$\overrightarrow{OD}$的坐标，从而求得顶点 D 的坐标：先求出$\overrightarrow{BC}$，再由$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$求得顶点 D 的坐标. 解题过程中，关键是充分利用图形中各线段的位置关系.

教材正文旁边“贴士”提出：你能利用$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$求出点 D 的坐标吗？

仿照教材例题的解法，求得$\overrightarrow{BA}=(1,\ 2)$后，进一步可得

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=(2,\ 2)+(1,\ 2)=(3,\ 4)$.

另一种解法是利用“两个向量相等，则它们的坐标相等”，运用方程思想求解. 即设顶点 D 的坐标为 $(x,\ y)$，则$\overrightarrow{AD}=(x+1,\ y-3)$，$\overrightarrow{BC}=(4,\ 1)$，然后由$(x+1,\ y-3)=(4,\ 1)$，也可以求得顶点 D 的坐标.

平行四边形的性质很多，利用不同的性质可以得到本题的不同解法，如利用平行四边形对角线互相平分还可以得到如下解法：

连接 AC，BD，设 AC，BD 相交于点 P，则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}).$$

同理$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$，

所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

于是$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1,\ 3)+(2,\ 2)-(-2,\ 1)=(3,\ 4)$.

所以顶点 D 的坐标为$(3,\ 4)$.

例 7 实际上是推导线段的定比分点坐标公式，并进一步给出了线段的中点坐标公式. 本题通过简单的向量运算求出线段上点的坐标，体现了向量坐标运算的优越性.

在本题中，$\lambda\neq-1$，这是因为假设 $\lambda=-1$，则$\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$，$\overrightarrow{P_1P}+\overrightarrow{PP_2}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\mathbf{0}$，这与点 P_1，P_2 是线段 P_1P_2 的端点矛盾.

例 8 本例的解答给出了判断三点共线的一种常用方法，其实质是从同一点出发的两个向量共线，则这两个向量的三个顶点共线，这是从平面几何中判断三点共线的方法移植过来的.

★补充例题

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(x,\ 1)$，若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 x 的值.

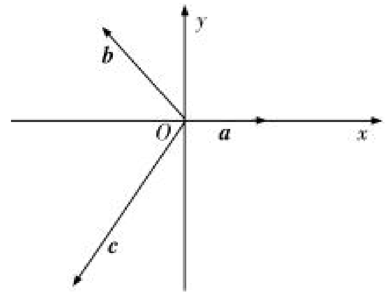
解： $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,\ 2)+2(x,\ 1)=(2x+1,\ 4)$，

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,\ 2)-(x,\ 1)=(2-x,\ 3)$.

因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，则 $3(2x+1)-4(2-x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

说明： 本例既要求学生熟悉向量加减与向量数乘的综合运算，同时也要会用向量共线的坐标公式求解，全面考查本节所学知识.

例 2　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两之间的夹角都是 $120°$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.



解：建立平面直角坐标系，如图所示，设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，

则 $\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$.

说明：本例蕴含数学建模素养的渗透，也是教材例 3 知识的变形应用，要求学生能根据已知条件确定三个向量的坐标，由于没有确定任何一个向量的方向，故可以其中一个向量的方向为 x 轴正方向，建立平面直角坐标系.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，已知点 $A(5,-1)$，向量 $\overrightarrow{AB}=(-6,8)$，$\overrightarrow{BC}=(2,-5)$，设 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 边于 D，求点 D 的坐标.

解：由已知，得 $\overrightarrow{OA}=(5,-1)$，则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(5,-1)+(-6,8)=(-1,7)$，

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(-1,7)+(2,-5)=(1,2)$，所以点 $B(-1,7)$，$C(1,2)$.

因此，$|AB|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$，$|AC|=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}=5$.

由角平分线性质定理，得 $|BD|:|CD|=|AB|:|AC|=2$.

又点 D 在线段 BC 上，所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$.

设点 D 的坐标为 (x,y)，则 $(x+1,y-7)=2(1-x,2-y)$.

所以 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{11}{3}$，故点 D 的坐标是 $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$.

说明：本例是教材例 7 知识的应用，要求学生结合角平分线的性质定理及向量线性运算的坐标表示求解.

4. 相关链接

向量进入中学数学的背景

1. 向量的双重性

向量是一个具有几何和代数双重身份的概念，同时向量代数所依附的线性代数是高等数学中一个完整的体系，具有良好的分析方法和完整结构. 通过运用向量对传统问题进行分析，可以帮助学生更好地建立代数与几何的联系，也为中学数学向高等数学过渡奠定一个直观的基础.

2. 认识向量的另外一个角度

把平面和空间看成一个向量场，可以培养学生对结构数学的认识，而结构数学是现代数学发展的主要方向. 利用参数方程的概念，可以把曲线看作向量函数的轨迹，使学生将微积分运用于几何的研究和学习中. 这里也可以把向量的引入理解为现代数学与初等数学的衔接组成部分之一.

3. “数、量与运算”的扩大

从“数、量与运算”发展的角度理解向量，把向量的加减法、数乘和数量积看作新的运算，使学生认识到数、量和运算的形式在不断地发展. 更为重要的是，在教学时应该表现出“数、量和运算”的一个发展趋势链，其中数的发展包括正整数→自然数→正分数→非负有理数→有理数→实数→复数. 从代数结构的角度看，经历了整数域→有理数域→实数域→复数域，这些“数”所对应的“量”都是一类的，并且“运算”的结构没有改变，从整体上看“数”在发展，而“量”及“运算”没有本质的发展. 因此向量不是“数”的简单扩大，它所关注的不是“数”的扩大问题，而是“量及运算”的扩大问题.

因而在引入向量时，不宜从代数方程的角度出发，从力学的实际背景出发更能体现出“量”的发展. 同时还应该强调向量代数是以前所有“数的运算”的一个发展(如果引入向量的数量积运算，将使学生第一次看到运算可以不满足交换律的真正案例)，使学生对此问题有一个发展的理解，也为今后引入矩阵及其运算作铺垫.

4. 国际数学教育对向量的处理

国际数学教育的发展已全面反映了综合几何学习的落后，向量和矩阵进入中学数学是一个大的趋势，比如美国的《学校数学的原则和标准》、《新西兰数学课程标准》和《澳大利亚数学教学大纲》都在此问题上有全面的反映. 从总体上分析，基本共识是基于以下的事实：希尔伯特的《几何学基础》的发表，标志着几何学基础的彻底革新，也发展了现代数学的公理化模式. 以此为推动力，数学本体在这个方面的研究几乎穷尽. 中学的综合几何就是扩大了公理体系的希尔伯特几何的简单情形. 如果我国几何教学仍然停留不动，那么我们的数学教育很难反映数学发展的进程，也与国际数学教育的发展相去甚远.

5. 数学和物理学的关系在向量中的体现

数学和物理学的关系在中学阶段应该得到重视和发展，事实上一个良好的物理或现实背景是学生对数学产生兴趣和学好数学的重要因素，并且数学和物理世界紧密关联. 20 世纪最伟大的数学家之一、为“纯数学”而竭力辩白的英国数学家哈代曾说：“还没有哪个数学家纯到对物理世界毫无兴趣的地步.”尤其到今天，数学和物理学的关系是有目共睹的，而向量在力学中的应用即使在中学阶段也是不难发现的. 使学生尽早地认识到数学与物理世界的紧密关系，不仅可以增强学生学习的兴趣，同时也能使学生认识到数学伟大的社会性.

6. 数学“机械化”与向量的关系

吴文俊先生在《数学教育现代化问题》一文中明确指出：数学教育现代化问题就是机械化问题. 他还曾说过：现代化就是机械化……我想谈的主要是中学范围里边的数学现代化，或者照我的看法，所谓数学机械化的问题.

关于传统几何的改革，吴文俊先生说：“对欧几里得几何应该怎么看，我说明一下我的看法，我有点倾向于恩格斯的数学关系. 数学研究数量关系与空间形式，简单讲就是形与数，欧几里得几何体系的特点是排除了数量关系.”“对于几何，对于研究空间形式，你要真正的腾飞，不通过数量关系，我想不出有什么好办法.”吴文俊先生明确指出为了使中学几何“腾飞”，必须采取“数量化”的方法，也就是代数化几何的处理方法. 事实上，我们不难发现向量几何具有一定的机械化.

7. 向量的教学实践过程可行性问题

在中学阶段引入向量是完全可以接受的. 这是因为：第一，学生有初步的平面坐标几何的基础；第二，教师有良好的立体几何的教学背景，教师在把传统的综合几何转移到向量代数处理立体几何时有很好的直观背景，并可以使之迁移到学生的学习过程中去. 除此之外，现代化技术在向量的“教与学”中可以帮助教师和学生. 利用图形计算器、计算机和动态几何软件不仅可以解决几何“直观性”的问题，同时也使得学生的向量学习入门更容易. 在国际上，这种案例是很多的.

1.5　向量的数量积

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

1. 了解平面向量数量积的物理背景，理解数量积的含义及其物理意义.
2. 通过几何直观，了解平面向量的数量积与向量投影的关系，掌握数量积的性质和运算律.

◆ **本节难点：**

1. 平面向量数量积的定义和运算律的理解.
2. 运用数量积的性质和运算律进行相关的运算和判断.

二、教材编写意图

平面向量的数量积是继向量的线性运算之后的又一重要运算，也是高中数学的一个重要概念，在数学、物理等学科中应用十分广泛.

教材从物理学中“功”的事例抽象出平面向量数量积的概念，在此基础上探究数量积的性质与运算律，使学生体会类比的思想方法，进一步培养学生的抽象概括和推理论证的能力.

三、教学建议

新课标相对于旧课标，平面向量内容有两点突出的变化，教学时应予以关注：

①对于平面向量投影的概念及投影向量的意义的具体需求，从“体会”变为了“了解”，但突出了“通过几何直观感知”；

②突出了“会计算平面向量的数量积”.

本节内容教材共安排两小节，1.5.1 节主要研究数量积的定义和计算，1.5.2 节主要研究数量积的坐标表示及计算，建议第一小节内容安排两课时，第二小节内容安排一课时.

1.5.1　数量积的定义及计算

1. 数量积的物理背景

数学是自然的，而不是强加于人的. 平面向量的数量积这一重要概念，和向量的线性运算一样，也有其数学背景和物理背景，为了体现这一点，教材以学生熟悉的拉力对小车做功为背景，引出数量积的概念.

要正确理解功的概念，关键在于搞清力与是否做功的关系问题，为此教材将数量积的物理背景单独编排成一小节，结合力学知识分析当拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 方向不相同时，功不等于力的大小与位移的大小的乘积，但仍是这两个向量的某种类型的乘积. 此时，可将 $\boldsymbol{F}$ 分解为水平和垂直两个方向的分力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$

之和，而与位移 $\boldsymbol{s}$ 垂直的力 $\boldsymbol{F}_2$ 所做的功为 0. 所以合力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 等于分力 $\boldsymbol{F}_1$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 上所做的功.

2. 数量积的定义

向量的数量积是一种新的向量运算，与向量的加法、减法、数乘运算一样，它也有明显的物理意义、几何意义，且用途广泛. 但与向量的线性运算不同的是，它的运算结果不是向量而是数量，正是这个不同点沟通了向量运算与数量之间的关系.

教材 P. 32 在给出数量积的定义时，没有将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为零向量的情况特别规定，主要是因为在教材 P. 16 已经对零向量作了规定：可以规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 0，零向量与任一向量平行，也可以规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，零向量与任一向量垂直.

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，此时规定零向量与任一向量垂直，因而也有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，从而得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 对所有情形均成立.

数量积的结果与线性运算的结果有着本质的不同，应让学生认识到向量的夹角是决定数量积结果的重要因素，为了更好地理解数量积的性质和运算律作铺垫，教学时可要求学生结合定义完成如下表格：

角 α 的范围	$0°\leqslant\alpha<90°$	$\alpha=90°$	$90°<\alpha\leqslant180°$
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的符号（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量）	正	零	负

3. 投影

为了理解向量数量积的定义和几何意义，研究向量数量积的运算律，教材 P. 33 引入了投影向量及投影长的概念. 需要注意的是，向量$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$上的投影向量，不是线段的长度，它是与$\overrightarrow{OA}$平行的向量. 教学时，教师可以结合图形让学生说出$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$上的投影向量是什么，并通过图形加以直观解释.

教材 P. 33 将 $\overrightarrow{OB}$表示为 $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1B}$，引导学生探讨 $\overrightarrow{OB}$在 $\overrightarrow{OA}$上的投影向量 $\overrightarrow{OB_1}$与 $\boldsymbol{e}$(与$\overrightarrow{OA}$方向相同的单位向量)，$\overrightarrow{OB}$，α 之间的关系，以加深对投影向量的理解，进而会求一个向量在另一个向量上的投影向量.

教学时，要让学生体会分类讨论、数形结合是研究投影向量等问题的重要数学思想. 让学生分 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的夹角 α 为锐角、直角、钝角以及 $\alpha=0$，$\alpha=\pi$ 等情况进行讨论，得出如下关系成立：$\overrightarrow{OB_1}=(|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\alpha)\boldsymbol{e}$. 可以特别提出如果两个向量平行或垂直，$\overrightarrow{OB}$在 $\overrightarrow{OA}$上的投影向量具有特殊性，要让学生尝试发现相关的特殊结论，培养学生数形结合及由一般到特殊的思维方法.

在学习投影的概念时，应注意提醒学生投影向量与向量的投影是不同的概念，前者是一个向量，后者是一个数量，其值可正，可负，也可为零，其符号取决于两向量之间的夹角，同时也应注意区分“向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影”与“向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影”是不同的.

4. 数量积的运算律

与引进向量的线性运算时的想法一致，引进向量的数量积以后，考察这种运算的运算律是非常自然的.

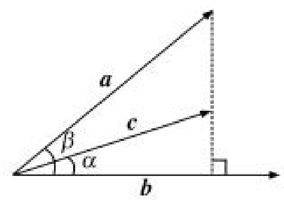
教学时，可以引导学生探索“交换律”“结合律”及“分配律”的证明，其中向量数量积关于向量加法的分配律是特别重要的，教材给出了详细证明. 这一运算律的证明，只要根据向量的数量积的定义，用几何方法将有关量表示出来就可以得到. 教学中应当先让学生独立完成三个运算律的证明，然后

教师作适当点拨和评价.

关于运算律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明，关键是要引导学生得出 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量等于 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的和. 为了说明这一点，关键在于证明 $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C'}$，由之前学习的投影长的概念可以得到：$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2$. 利用这一等式学生能方便地证明结论，在这个运算律的证明中难点是构造图形，教师在教学中可以先让学生动手画草图，再借助信息技术工具画出不同情形的辅助图形，帮助学生直观认识投影向量间的关系.

对于向量的数量积运算，学生容易受实数乘法运算性质的“负迁移”的影响，可能出现一些错误，教师要尽可能地引导学生举一些反例，纠正错误. 教学时可设置一些判断正误的命题，引导学生借助画图、举反例来澄清认识，体会向量运算与实数运算的差异.

特别应提醒学生注意的是：对于实数 a，b，c 有 $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$，但对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立. 这是因为 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 表示一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定共线，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立. 学生对向量数量积的认识是逐步加深的，必要时，教师可以提醒学生画图或列表，对比实数的乘法与向量的数量积运算的不同之处，或者再举一些反例强化学生的认识. 例如，已知实数 a，b，$c(b\neq0)$，则 $ab=bc\Rightarrow a=c$. 但对向量的数量积，该推理不正确，即由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，不一定能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. 由右图很容易看出，虽然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$.



5. 例题的教学分析

例 1　教学中可引导学生对向量的数量积与数的乘法运算进行对比，并总结：对共线的两个向量，将其写成同一个单位向量的实数倍后，这两个向量的数量积等于它们对应的实数的乘积. 教学中应让学生明确向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与代数中数 a，b 的乘积 ab 不同，所以书写时一定要严格区分开来，以免影响后面的学习.

例 2　给出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，由向量数量积的定义可以求出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值，进而求出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

例 3　是用向量方法证明菱形的对角线互相垂直这一几何性质，证明的关键是把直线 AC 与 BD 垂直这一几何关系转化为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，证明中要用到结论 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，教材正文旁“贴士”提出要注意将向量这一运算律的推导过程与实数进行类比.

教材 P. 35 最后提出思考问题：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 成立吗？答案是肯定的，这可以由数量积的分配律推导，同时 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 也是成立的. 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则有 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$，作出向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则这一等式的几何意义是矩形对角线的平方等于矩形长和宽的平方和.

★补充例题

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值.

解：由已知，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(-\boldsymbol{c})^2$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2$.

所以 $3^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+5^2=7^2$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{15}{2}$.

说明：本题是为巩固数量积的定义和运算律而设置的，本题将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 等价变形为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$ 后再平方是解题的关键.

例 2　在△ABC 中，D 为 BC 边上一点，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$AD\perp AB$，且 $AD=1$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值.

解：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

又 $AD\perp AB$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

因此$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle ADB=\sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\sqrt{3}$.

说明：本题是进一步学习将垂直关系转化为数量积为 0 来解决问题，体会向量方法的优越性.

例 3　已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 满足$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，求$|\boldsymbol{c}|$的最大值.

解：(方法一）设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $OA\perp OB$. 因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，则 $CA\perp CB$.

所以 O，A，C，B 四点共圆，且 AB 为圆的直径.

因为 $OA=OB=1$，则 $AB=\sqrt{2}$，所以当 OC 为圆的直径时，$|\boldsymbol{c}|$取最大值$\sqrt{2}$.

(方法二)由$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=0$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以 $\boldsymbol{c}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，即$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$.

因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}\cos\theta$，其最大值为$\sqrt{2}$.

说明：本题从“数”或“形”两个角度均可求解，“形”的角度求解的难点是几何模型的构造，“数”的角度求解的难点是如何结合数量积的定义将$|\boldsymbol{c}|$转化为用夹角 θ 表示.

6. 相关链接

向量数量积的几条代数性质及其用处

两个向量的数量积具有一些特殊的性质，能帮我们解决一些相关问题.

(1) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

此性质可以解决几何中的垂直问题.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

此性质可以解决直线的平行、点共线、向量共线问题.

(3) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

此性质可以解决向量的夹角问题.

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，$|\boldsymbol{a}|=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|\cos\theta}$.

此性质可以解决长度问题.

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

此性质要注意和绝对值的性质的区别，可以解决不等式的有关问题.

1.5.2　数量积的坐标表示及其计算

1. 数量积的坐标表示

有了平面向量的坐标表示以及坐标运算的经验，引入平面向量的数量积后，自然要考虑它的坐标表示问题.

研究平面向量数量积的坐标表示，解决这个问题的关键：一是用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$；二是运用向量数量积的运算律计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)$；三是注意单位向量之间的数量积 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=1$，$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$.

由于平面向量数量积涉及了向量的模、夹角，因此在实现向量数量积的坐标表示后，向量的模、夹角也都可以与向量的坐标联系起来.

2. 计算公式

得到 $|\boldsymbol{a}|$ 的计算公式后，可以进一步将 $|\boldsymbol{a}|$ 表示为有向线段的起点和终点坐标的关系式：

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，那么

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，这就是平面内两点的距离公式.

又由夹角公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ 可得，

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

这些公式很容易由数量积的定义及向量的坐标表示推导得到.

教学中还可以结合前面学习的内容，提出一些探究思考题，加深学生对向量坐标表示几何量的理解，如：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影用坐标如何表示？

(2) 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量的坐标是什么？

(3) 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标是什么？

3. 例题的教学分析

例 4 是直接用两个向量共线、垂直及夹角公式对应的坐标计算公式解题. 但应特别提出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角不能等价于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，这是因为当两向量共线且方向相反时，也满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，但此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 π.

例 5 共有 5 小问，其中(4)是投影长公式的应用，可以要学生推导一般结论(见教材 P. 38 的“贴士”)，(5)是求 $S_{\triangle OAB}$ 的两种方法. 在已求得前面结论的基础上，介绍了两种方法，其中方法二的重点是渗透转化思想，即结合图形将 $|OA|$ 与 $|BD|$ 的积转化为已知坐标的两向量的数量积.

另外，还可以介绍向量坐标下的三角形面积公式，即在 $\triangle OAB$ 中，$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$，则 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

★补充例题

例 1 判断下列说法是否正确.

①设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_1+x_2y_2$.

②设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)(x_1x_2\neq0)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$.

③设向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的坐标是 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

④设向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{b}=(y, -x)$.

⑤设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则 $\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$.

解：①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，说法错误.

②若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $y_1y_2=-x_1x_2$. 又 $x_1x_2\neq 0$，则$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$，说法正确.

③与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$，说法正确.

④当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$时，$\boldsymbol{b}=(y, -x)$或$(-y, x)$，说法错误.

⑤因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\cos\theta=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，说法正确.

说明：由于本节公式较多，通过正误的辨析可以让学生熟记公式，注意②如果没有规定 $x_1x_2\neq 0$，则不能写成分式的形式. ④有两个向量$(y, -x)$或$(-y, x)$都是满足的，且它们是相反向量.

例 2 已知 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-4, 3)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3, 4)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解：因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-4, 3)$，则 $4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-8, 6)$，

所以$(4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=(-8, 6)+(3, 4)=(-5, 10)$，

即 $5\boldsymbol{a}=(-5, 10)$，所以 $\boldsymbol{a}=(-1, 2)$.

于是 $\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{a}=(-4, 3)-(-2, 4)=(-2, -1)$.

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times(-2)+2\times(-1)=0$，得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $90°$.

说明：要求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，应根据公式 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$来计算，可分两步进行，一是求出它们的数量积，二是求出它们模的乘积，本题应先把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 分别用坐标表示，计算时也可设出它们的坐标，然后用待定系数法求出.

例 3 已知 Rt△AOB 的面积为 1，O 为直角顶点. 设向量 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值.

解：以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立直角坐标系.

因为 Rt△AOB 的面积为 1，则$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=2$.

设$|\overrightarrow{OA}|=t(t>0)$，则$|\overrightarrow{OB}|=\dfrac{2}{t}$，点 $A(t, 0)$，$B\left(0, \dfrac{2}{t}\right)$.

由题设，向量 $\boldsymbol{a}=(1, 0)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1)$，则 $\overrightarrow{OP}=(1, 2)$，从而 $\overrightarrow{PA}=(t-1, -2)$，$\overrightarrow{PB}=\left(-1, \dfrac{2}{t}-2\right)$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(t-1)-2\left(\dfrac{2}{t}-2\right)=5-\left(t+\dfrac{4}{t}\right)\leqslant 5-2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}=1$，当且仅当 $t=2$ 时取等号.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为 1.

说明：本题将平面向量的数量积的坐标运算与运用基本不等式求最值相结合，体现了数学知识的综合应用. 当给出两个向量是标准正交基时，应联想到以此两向量建立平面直角坐标系，转化为坐标问题计算.

4. 相关链接

巧用向量数量积

法国哲学家狄罗说过，数学中所谓美的问题是指一个难以解决的问题，而美的解答是指一个复杂问

题的解答. 向量的数量积是高中数学的重要内容. 巧用向量数量积的性质证明不等式、求解函数最值有意想不到的效果.

一、向量数量积的性质

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，我们把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积，其中 α 是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角. 由向量的数量积定义可得下列性质：

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时等号成立. 对上式进行变形得到以下公式：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

可见利用上述两个式子解不等式，其运算的规则相当简单. 当等号成立的时候，不等式的问题，就变成了等式问题，或者是最值问题.

二、向量数量积的应用

（一）求最值

例 1　已知 $0<x<\pi$，求 $\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$ 的最小值.

解：设 $y=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$，由题设知 $y>0$ 且 $\cos x+y\sin x=2$. 构造向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\ \sin x)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ y)$. 由 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，即 $|\cos x+y\sin x|\leqslant\sqrt{\cos^2x+\sin^2x}\cdot\sqrt{1+y^2}$，

所以 $2\leqslant\sqrt{1+y^2}\Rightarrow y\geqslant\sqrt{3}$.

当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，即 $\dfrac{\cos x}{1}=\dfrac{\sin x}{y}$ 时等号成立，此时 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}\Rightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}$.

故当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，y 取得最小值 $\sqrt{3}$，即 $\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

（二）比较大小

例 2　已知 m，n，a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，且 $p=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，那么 p，q 的大小关系为（　　）

A. $p\leqslant q$　　B. $p\geqslant q$　　C. $p<q$　　D. p，q 的大小不能确定

解：设 $\boldsymbol{h}=(\sqrt{ma},\ \sqrt{nc})$，$\boldsymbol{k}=\left(\sqrt{\dfrac{b}{m}},\ \sqrt{\dfrac{d}{n}}\right)$. 由数量积的坐标运算，得 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{k}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，而 $|\boldsymbol{h}|=\sqrt{ma+nc}$，$|\boldsymbol{k}|=\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，则由性质 $|\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{k}|\leqslant|\boldsymbol{h}||\boldsymbol{k}|$，得 $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，即 $p\leqslant q$，故选 A.

（三）证明不等式

例 3　设任意实数 x，y 满足 $|x|<1$，$|y|<1$，求证：$\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1-y^2}\geqslant\dfrac{2}{1-xy}$.

证明：构造向量 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-y^2})$，

由 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，得 $4\leqslant\left(\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1-y^2}\right)(1-x^2+1-y^2)$.

$\because|x|<1$，$|y|<1$，$\therefore 1-x^2+1-y^2=2-(x^2+y^2)>0$，

$\therefore\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1-y^2}\geqslant\dfrac{4}{2-(x^2+y^2)}\geqslant\dfrac{4}{2-2xy}=\dfrac{2}{1-xy}$.

1.6 解三角形

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

1. 借助向量的运算，对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握余弦定理、正弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

2. 能够熟练运用余弦定理、正弦定理等知识和方法解决一些简单的实际问题.

◆ 本节难点：

1. 通过对三角形边角关系的探究，证明余弦定理、正弦定理.

2. 余弦定理、正弦定理与三角形有关性质的综合应用.

二、教材编写意图

解三角形的相关内容，在课标中是作为必修内容平面向量的应用出现的，课标对这一部分内容的要求，只有简单的两句话，“借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理”，“能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题”. 而且在“教学提示”与“学业要求”中，未再单独提到有关内容.

课标和教材把“解三角形”这部分内容安排在平面向量这一章，在此之前学生已经学习了三角函数、平面向量等与解三角形联系密切的内容，使这部分内容的处理有了比较多的工具，某些内容可以处理得更加简洁. 比如对于余弦定理的证明，常用的方法需要对三角形进行讨论，方法不够简洁，教材则用了向量的方法，发挥了向量方法在解决问题中的威力. 同时余弦定理和正弦定理是刻画三角形边角关系最为重要的两个定理，为解三角形提供了基本而重要的工具.

本节教材共分为三节，1.6.1 小节首先承上启下从向量方法探究余弦定理的证明，并揭示了其与勾股定理的内在联系，这是教材将余弦定理的内容放在最前面的缘由. 1.6.2 小节分析了直角三角形的正弦定理，并结合三角形的面积公式证明了锐(钝)角三角形的正弦定理，并借用外接圆揭示了正弦定理中比值的几何意义，从而得到扩充的正弦定理. 1.6.3 小节重点分析正余弦定理在实际生活中的应用，使学生掌握用正弦定理与余弦定理解任意三角形的方法，懂得解任意三角形的知识在实际中有广泛的应用，经历用正弦定理、余弦定理解决测量问题的过程，从而培养学生分析问题、解决问题的能力.

三、教学建议

本节导语中提到了借助锐角三角函数的相关知识解决一些有关直角三角形的问题，并提出实际生活中遇到有关斜三角形问题如何求解. 这是在已有知识经验和方法的基础上，面对新领域提出新问题，让学生进一步增长数学知识，激发学习兴趣.

接着教材说明了什么是解三角形：三角形的三个内角和三条边叫作三角形的元素. 由已知三角形的某些元素求其他元素的过程叫作解三角形. 应该注意，已知的元素为什么至少要包括一条边？这可以根据判定三角形全等的方法来解释，当只确定三角形的三个角时，并不能确定三角形的大小. 同时还应提出，对于解三角形的描述是对传统的解三角形的一个简化. 在传统的解三角形问题中，把三角形的中

线、高、角平分线等也作为三角形的元素，而教材抓住核心重点，只把边和角作为元素.

1.6.1　余弦定理

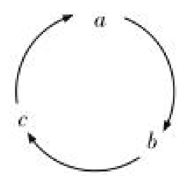
1. 余弦定理的探究

教材 P. 41 首先指出，根据判定三角形全等的方法，已知三角形的两条边及其所夹的角，这个三角形就是大小、形状完全确定的三角形. 解这个三角形，就是从量化的角度来研究问题，也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算三角形的另一边和其他两个角的问题.

对于余弦定理，教材利用向量的模长及数量积的知识进行证明，突出了向量在解决三角形问题中的工具作用，当然也突出了本章内容的基础性.

2. 余弦定理中边的可轮换性

余弦定理中的边 a，b，c 轮换的方式如图所示，按上述方式对边进行轮换，并注意到夹角，就可以从余弦定理的一个式子得到其余的两个式子. 正因为余弦定理中的边具有可轮换的特点，所以余弦定理可以用概括的文字语言统一叙述，即教材中给出的文字叙述. 教学中可以引导学生自行用文字语言叙述余弦定理，以此培养学生的数学表达能力.



3. 例题的教学分析

余弦定理及其推论的基本作用为：

①已知三角形的任意两边及它们的夹角就可以求出第三边；

②已知三角形的三条边就可以求出三个内角.

例 1　说明了余弦定理及其推论可以解决解三角形问题. 本例题是已知两边及其夹角求解三角形，可以用余弦定理求出第三条边，这样就把问题转化成了已知三边解三角形的问题. 在已知三边和一个角的情况下，求另一个角可以用余弦定理的推论求解，还可以根据角的余弦值直接判断是锐角还是钝角.

例 2　将三角形的高 BD 用 $c\sin A$ 表示，并进一步求解三角形的面积，为下一节正弦定理的证明做铺垫.

在利用余弦定理求边长时，有时会因为定理使用不当而产生增根，教学时应关注这一点. 已知三角形的两边及其中一边的对角，三角形不一定能唯一确定，这与我们初中所学的 SSA 不能作为三角形全等的判定定理是一致的. 事实上，当角为较长边所对的角时，三角形唯一确定.

例 3　要根据三角形中大边对大角，小边对小角的原理先判定 $\angle C$ 是最大内角，然后根据余弦定理求解. 已知三边求解三角形，三角形唯一确定，所以有唯一解，这与初中所学的三角形全等的判定定理 SSS 一致.

★补充例题

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$D$ 为 AC 的中点，$BD=\sqrt{5}$，求 BC 边的长.

解：（方法一）取 BC 的中点 E，连接 DE.

因为 D 为 AC 的中点，则

$DE/\!/AB$，且 $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle BED=\cos(\pi-\angle ABC)=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

在$\triangle BED$ 中，设 $BE=x$，由余弦定理，得 $x^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2-2x\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=(\sqrt{5})^2$，

即 $3x^2+4x-7=0$，即 $(3x+7)(x-1)=0$. 因为 $x>0$，则 $x=1$，所以 $BC=2x=2$.

(方法二)因为 D 为 AC 的中点，则$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$.

因为 $BD=\sqrt{5}$，则$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=4|\overrightarrow{BD}|^2=20$，即$\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=20$.

因为 $AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{6}}{6}$，则$\frac{32}{3}+2\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times|\overrightarrow{BC}|\times\frac{\sqrt{6}}{6}+|\overrightarrow{BC}|^2=20$.

即 $3|\overrightarrow{BC}|^2+8|\overrightarrow{BC}|-28=0$，即 $(3|\overrightarrow{BC}|+14)(|\overrightarrow{BC}|-2)=0$，所以$|\overrightarrow{BC}|=2$，即 $BC=2$.

说明：通过本例熟练用余弦定理或向量法求解三角形边长问题，能借助余弦定理将题中给定的已知条件集中在一个三角形中.

例 2　在$\triangle ABC$ 中，已知 $c=2$，$\angle C=\frac{\pi}{3}$，求$\triangle ABC$ 周长的最大值.

解：由余弦定理，得 $a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=4$，即 $a^2+b^2-ab=4$，即 $3ab=(a+b)^2-4$.

因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，则 $(a+b)^2-4\leqslant\frac{3}{4}(a+b)^2$，得 $(a+b)^2\leqslant 16$，

从而 $a+b\leqslant 4$，当 $a=b$ 时取等号.

所以$\triangle ABC$ 周长的最大值为 $4+2=6$.

说明：本例要注意 ab 和 $a+b$ 的关系，选用基本不等式的变形公式 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 来求最值.

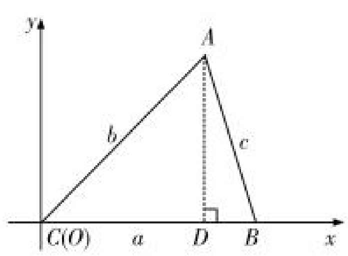
4. 相关链接

余弦定理的几种证法

一、坐标法

如图(1)，以 C 为原点，边 CB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系. 设点 B 的坐标为 $(a,0)$，点 A 的坐标为 $(b\cos C, b\sin C)$，根据两点间距离公式，得

$$AB=\sqrt{(b\cos C-a)^2+(b\sin C-0)^2},$$



(1)

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

同理可证 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

也可以用三角方法证明余弦定理.

当三角形是锐角三角形时，如图(2)，证明过程如下：

$AD=b\sin C$，$BD=BC-CD=a-b\cos C$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

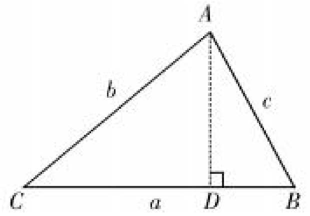
$AB^2=AD^2+BD^2=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2$.

整理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

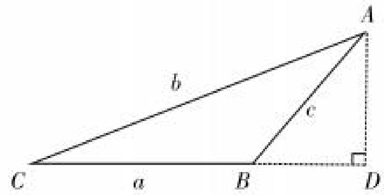
当三角形是钝角三角形时，如图(3)，$AD=b\sin C$，$BD=CD-BC=b\cos C-a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2=(b\sin C)^2+(b\cos C-a)^2$.

整理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.



(2)



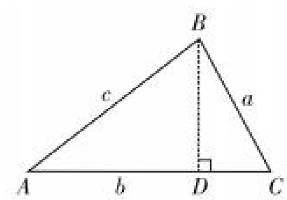
(3)

另外两个等式可以类似进行证明.

二、几何法

当三角形是锐角三角形时，如图(4)，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D，则

$$\begin{aligned}BC^2&=CD^2+BD^2\\&=(AC-AD)^2+BD^2\\&=AC^2-2AC\cdot AD+AD^2+BD^2\\&=AC^2+AB^2-2AC\cdot AD.\end{aligned}$$



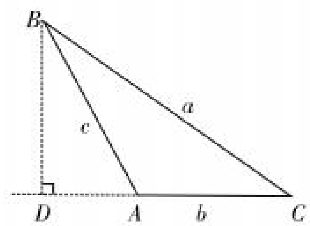
(4)

因为 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$AD=c\cos A$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

当三角形是钝角三角形时，如图(5)，不妨设$\angle BAC$ 为钝角. 过点 B 作 AC 的垂线，与 CA 的延长线相交于点 D，则

$$\begin{aligned}BC^2&=CD^2+BD^2=(AC+AD)^2+BD^2\\&=AC^2+2AC\cdot AD+AD^2+BD^2\\&=AC^2+AB^2+2AC\cdot AD.\end{aligned}$$



(5)

因为 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$AD=AB\cos(180°-\angle A)=-c\cos A$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

当三角形是直角三角形时，不妨设$\angle A$ 为直角，此时也有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

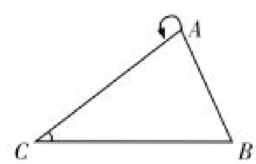
类似地，可以得到余弦定理的另外两个等式.

1.6.2　正弦定理

1. 正弦定理的探究

由余弦定理可以得到三角形的边角有准确量化的关系，由这种数量关系，就比较自然地联想到三角函数. 教学时，可以以下面问题作为课题导入.

如右图，固定$\triangle ABC$ 的边 CB 及$\angle B$，使边 AC 绕着顶点 C 转动. 思考：$\angle C$ 的大小与它的对边 AB 的长度之间有怎样的数量关系？显然，边 AB 的长度随着其对角$\angle C$ 的增大而增大. 能否用一个等式把这种关系精确地表示出来？



教材 P. 44 先研究直角三角形，发现边之间的比就是锐角的三角函数，从而能证明直角三角形中的正弦定理.

接着分析直角三角形中的正弦定理，考察结论是否适用于锐角三角形，可以发现 $a\sin B$ 和 $b\sin A$ 实际上表示了锐角三角形 AB 边上的高，就容易得到三角形的面积计算公式. 这样，由三角形面积公式的恒等变形得到正弦定理，这种证明水到渠成，易于学生理解，符合学生的认知规律.

对于正弦定理，教师可引导学生从图形语言、文字语言和符号语言三个方面进行理解、运用.

2. 正弦定理的应用

如果$\angle A<\angle B$，由三角形的性质，$a<b$. 当$\angle A$，$\angle B$都是锐角时，由正弦函数在区间$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上的单调性可知，$\sin A<\sin B$. 等式指出了三角形中边与对应角的正弦之间的一个关系式，它描述了三角形中大边对大角的一种准确的数量关系. 当$\angle A$是锐角，$\angle B$是钝角时，因为$\angle A+\angle B<\pi$，所以$\angle B<\pi-\angle A$，由正弦函数在区间$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$上的单调性可知，$\sin B>\sin(\pi-A)=\sin A$，所以$\sin A<\sin B$. 等式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$仍描述了三角形中大边对大角的一种准确的数量关系.

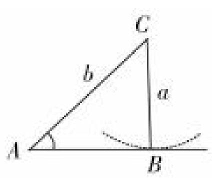
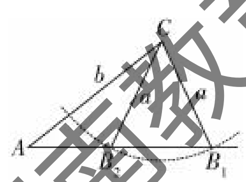
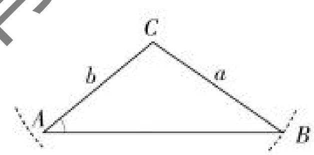
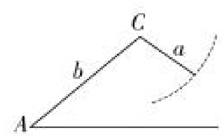
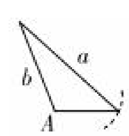
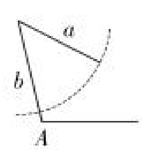
正弦定理可以用于两类解三角形问题：

(1) 已知三角形的任意两个角与一边，求其他两边和另一角；

(2) 已知三角形的两边与其中一边的对角，计算另一边的对角，进而计算出其他的边和角.

3. 三角形解的个数问题

已知三角形的两边和其中一边的对角，如何用正弦定理来确定三角形的个数，既是难点，也是易混淆点，教师要根据学生实际情况，进行符合学生认知规律的讲解. 通过尺规作图法，可以归纳为如下表格：

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">A 为锐角</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>关系式</td><td>$a=b\sin A$</td><td>$b\sin A<a<b$</td><td>$a\geqslant b$</td><td>$a<b\sin A$</td></tr>
<tr><td>解的个数</td><td>一解</td><td>两解</td><td>一解</td><td>无解</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">A 为钝角或直角</td></tr>
<tr><td>图形</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>关系式</td><td colspan="2">$a>b$</td><td colspan="2">$a\leqslant b$</td></tr>
<tr><td>解的个数</td><td colspan="2">一解</td><td colspan="2">无解</td></tr>
</table>

4. 扩充的正弦定理

用三角形的外接圆证明正弦定理需要熟知初中所学的几个结论：直径所对的圆周角为直角；同弧所对的圆周角相等；圆内接四边形对角互补.

直角三角形的情形较容易验证正弦定理，并得到其比值为外接圆的直径. 教学时应注意引导学生将锐角三角形或钝角三角形转化为直角三角形，从而启发学生过三角形的一个顶点作圆的直径，借助圆的

性质将三角形的内角转化为直角三角形的内角.

5. 例题的教学分析

例 4　背景设计新颖，分析时需要结合三角形的面积公式及图形特征联想到$\angle IAD+\angle CAB=180^\circ$，学生仅靠机械地模仿公式是很难解答出该问题的. 教学时可以指导学生，平时应养成观察、分析、归纳、类比、抽象、概括、猜想等发现问题、解决问题的科学思维方法，面临新的问题时才能较快找到解决问题的突破口.

例 5　已知两角与一边，求其他边、角. 由三角形内角和为 180°，可求出第三个角，再由正弦定理求出比值，即可求出其他两边.

例 6　两小问均是已知两边和其中一边的对角，但第(1)问有两解，而第(2)问只有一解，这可以根据三角形中大边对大角来判断. 题中最终有几个解，是由题中条件所确定的，明确角的范围是关键. 本题也为接下来进一步探究三角形解的个数做了铺垫.

例 7　是扩充的正弦定理的应用，证明的基本方法是边角互换. 解决此类问题需要结合题目本身特点，化边为角或化角为边.

例 8　实质是对用三角形外接圆半径 R 表示三角形面积的两个公式进行推导，公式 $S=\dfrac{abc}{4R}$ 是用三角形的边来表示，公式 $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ 是用三角形的角来表示，应用公式时应根据题设条件合理选择. 求三角形面积在历史上是一个重要的问题，西方有海伦公式，在我国数学史上有秦九韶的“三斜求积公式”，本书在后面“相关链接”中对此作了介绍.

★补充例题

例 1　在$\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}\sin 2A$，$a^2\cdot\tan B=b^2\cdot\tan A$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

解： 由正弦定理可知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，因此

$$(2R\sin A)^2\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A},$$

即 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，化简得 $\sin 2A=\sin 2B$.

因为 $0<\angle A<\pi$，$0<\angle B<\pi$，所以 $2\angle A=2\angle B$ 或 $2\angle A+2\angle B=\pi$，即

$\angle A=\angle B$ 或$\angle A+\angle B=\dfrac{\pi}{2}$.

因此，$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

说明： 通过本例题熟练正弦定理的应用，本题将条件化为 $\sin 2A=\sin 2B$ 后，容易出现漏解，应提醒学生注意结合正弦函数的图象及角的范围判断角 A，B 的关系.

例 2　在$\triangle ABC$ 中，已知 $ab=60\sqrt{3}$，$\sin B=\sin C$，且$\triangle ABC$ 的面积为 $15\sqrt{3}$，求 c 的值.

解： 由已知得，$\dfrac{1}{2}ab\sin C=15\sqrt{3}$，又 $ab=60\sqrt{3}$，则 $\sin C=\dfrac{1}{2}$.

因为 $\sin B=\sin C$，则 $b=c$，所以$\angle B=\angle C=30^\circ$，从而$\angle A=120^\circ$.

由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$得$\dfrac{a}{\sqrt{3}}=b=c$，故 $ab=\sqrt{3}c^2=60\sqrt{3}$，即 $c^2=60$，所以 $c=2\sqrt{15}$.

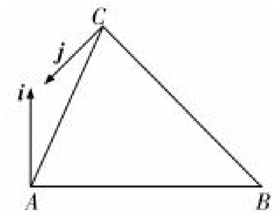
说明： 通过本题熟悉正弦定理和三角形面积公式的灵活运用，求解三角形问题应注意“三角形的内角和为 180°”这一隐含条件，同时将含 a，b，c 的等式转化为只含有一个变量 c 的等式是解答本题的关键.

6. 相关链接

正弦定理的几种证法

一、向量法

如右图，当△ABC 为锐角三角形时，过点 A 作 $\boldsymbol{i}\perp\overrightarrow{AB}$，由向量的加法可得$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



则 $\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{BC}$.

因而 $|\boldsymbol{i}||\overrightarrow{AC}|\cos(90°-\angle A)=0+|\boldsymbol{i}||\overrightarrow{BC}|\cos(90°-\angle B)$.

所以 $b\sin A=a\sin B$，即$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

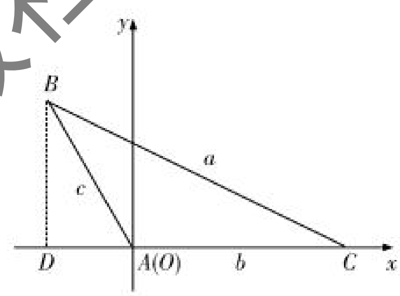
同理，过点 C 作 $\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{BC}$，可得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

从而$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

类似可推出，当△ABC 是钝角三角形时，以上关系式仍然成立.

二、面积法

如右图，以△ABC 的顶点 A 为原点，边 AC 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.



无论∠BAC 是锐角、钝角还是直角，由三角函数的定义知，点 B 的坐标为$(c\cos\angle BAC, c\sin\angle BAC)$. 过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D，则 $BD=c\sin\angle BAC$.

于是可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\times BD=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$.

同理可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\angle ABC$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle ACB$.

由此即得任意三角形的面积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

变形得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

1.6.3 解三角形应用举例

对于未知的距离、高度等，存在着许多可供选择的测量方案，可以应用全等三角形的方法，也可以应用相似三角形的方法，或借助解直角三角形的方法，以及正弦定理及余弦定理等. 但是，在测量问题的实际背景下，某些方法也许不能实施. 如因为没有足够的空间，不能用全等三角形的方法来测量，因此，一种方法会有其局限性. 教材中介绍的许多问题是用以前的方法所不能解决的.

本小节涉及的三个实际问题可以概括为：一是不能到达的同一水平面上两点的距离问题，二是不能到达底部的高度问题，三是在运动变化过程中蕴含的解三角形的问题. 对这些例题教学时，应注意引导学生认真领悟相关术语，根据问题中的文字语言，自行画出图形或将题中条件与所给图形中的几何量相对应，然后利用余弦定理和正弦定理计算. 这样处理，有助于培养学生文字语言、图形语言和符号语言

相互转译的能力以及数学建模素养.

1. 例题的教学建议

例 9 是应用解三角形知识求解与航行有关的距离问题. 求解三角形中与距离有关的问题的关键是转化求解三角形中的边，分析出所求解三角形中哪些元素已知，还需要哪些元素，应用正弦定理、余弦定理来解决问题. 本题实际上是已知三角形的两角和另一角的对边，解三角形其他边的问题，教学时应注意引导学生审题时应复习方向角的概念，并与方位角概念进行区分.

方向角：指北或指南方向线与目标方向所成的小于 90°的角，叫作方向角. 如北偏东 60°，南偏东 30°，北偏西 70°. 特别地，若目标方向线与指北或指南的方向线成 45°的角，则称东北方向、西南方向等.

方位角：从某点的指北方向线按顺时针转到目标方向的水平角，叫作方位角. 取值范围为 0°到 360°. 比如正东方向就是方位角为 90°，正西方向就方位角为 270°.

例 10 (1)问是求解底部不可到达的建筑物的高度问题. 由于底部不可到达，这类问题不能直接用解直角三角形的方法去解决，但常常先用正弦定理和余弦定理计算出建筑物顶部或底部到一个可到达的点之间的距离，然后再转化为解直角三角形的问题.

求解高度问题教学中应关注以下两点：

(1) 空间向平面转化. 高度测量问题往往是空间中的问题，为了方便观察，减小误差，需将空间问题转化为平面问题.

(2) 解直角三角形与解斜三角形结合，全面分析所有三角形，仔细规划解题思路.

(2)问是平面内求解线段的长度问题，应注意引导学生分析：若所求线段在一个三角形中，则直接用正弦定理、余弦定理求解；若所求的线段在多个三角形中，则依次选择或构造适当的三角形，再利用正弦定理、余弦定理求解.

例 11 讲解时需帮助学生建立数学模型，由于题目中没有给出图形，因此准确理解题意，画出示意图，是解决问题的重要环节.

角与距离是密切相关的，将背景材料中的相关数据转化为三角形的边、角值，再利用正、余弦定理求相关角的大小，是解题的基本思路.

如果角或距离不能直接利用正、余弦定理求解，就用方程思想处理，本题的(2)小题就是如此.

本节课教学时，可结合教材 P. 51 的流程图要学生归纳出解三角形应用题的四个步骤.

(1) 分析：理解题意，分清已知与未知，画出示意图.

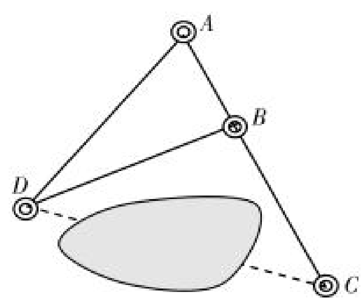
(2) 建模：根据已知条件与求解目标，把已知量与求解量尽量集中在有关的三角形中，建立一个解斜三角形的数学模型.

(3) 求解：利用正弦定理、余弦定理有序地解出三角形，求得数学模型的解.

(4) 检验：检验上述所求的解是否符合实际意义，从而得出实际问题的解.

★补充例题

例 1 如图，某旅游景区有四座古塔 A，B，C，D，其中 A，B，C 在同一条直线上，C 与 D 之间有一个小湖. 通过直接度量得知，A 与 B 相距 150 m，B 与 C 相距 200 m，B 与 D 相距 210 m，并测得$\angle BAD=60°$，求古塔 C 与 D 之间的距离.



解：在$\triangle ABD$ 中，$AB=150$，$BD=210$，$\angle BAD=60°$.

设 $AD=x$，则

$x^2+150^2-2x\cdot 150\cos 60°=210^2$，即 $x^2-150x-21\ 600=0$.

即 $(x-240)(x+90)=0$. 因为 $x>0$，则 $x=240$，所以 $AD=240$.

在△ACD 中，由余弦定理，得

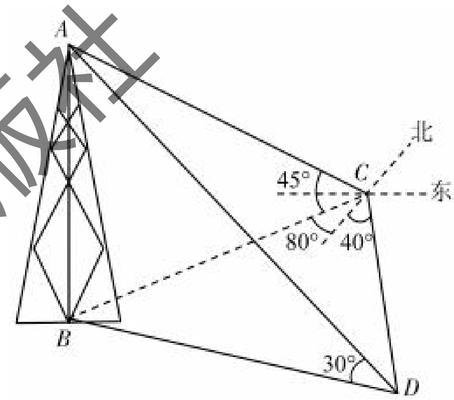
$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD$$
$$=350^2+240^2-2\times 350\times 240\cos 60°=96\ 100,$$

则 $CD=310$.

所以古塔 C 与 D 之间的距离是 310 m.

说明：在有多个三角形的几何图形中求解三角形的边长时，应先选定在哪个三角形中求解，再分析该三角形中哪些边角元素已知，明确还需要通过哪些三角形来求解待求的元素，以及是应用正弦定理还是余弦定理等. 本题对学生的运算求解能力要求较高，可训练学生的数学运算素养.

例 2 如图，为了测量某塔的高度，某人在一条水平公路 C，D 两点处进行测量. 在 C 点测得塔顶 A 在南偏西 80°，仰角为 45°，此人沿着南偏东 40°方向前进 10 m 到 D 点，测得塔顶的仰角为 30°，求塔的高度.



解：设塔高 $AB=x$ m，在 Rt△ABC 中，因为 $\angle ACB=45°$，则 $BC=AB=x$ m.

在 Rt△ABD 中，因为 $\angle ADB=30°$，

则 $BD=\dfrac{AB}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$(m).

在△BCD 中，由余弦定理，得

$BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cos 120°$，

则 $(\sqrt{3}x)^2=x^2+100+10x$，即 $x^2-5x-50=0$.

解得 $x=10$ 或 $x=-5$(舍去)，所以塔高为 10 m.

说明：本例题需要建立数学模型，将实际生活问题数学化. 处理此类问题时，应注意引导学生认真领悟相关术语，根据问题中的文字语言，对应写出图形中的角度和长度，然后利用余弦定理和正弦定理计算. 此类问题对于培养学生文字语言、图形语言和符号语言相互转译的能力以及数学建模素养，都是十分有益的.

2. 相关链接

海伦和秦九韶

古希腊的数学发展到亚历山大里亚时期，数学的应用性得到了很大的发展，其突出的一点就是三角术的发展. 三角术是人们为了建立定量的天文学，以便用来预报天体的运行路线和位置以帮助报时、计算日历、航海和研究地理而产生的.

在解三角形的问题中，一个比较困难的问题是如何由三角形的三边 a，b，c 直接求出三角形的面积. 据说这个问题最早是由古希腊数学家阿基米德解决的，他得到了公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

这里 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

但现在人们常常以古希腊的数学家海伦的名字命名这个公式，因为这个公式最早出现在海伦的著作《测地术》中，并且给出了公式的证明. 海伦公式解决了由三角形的三边直接求出三角形面积的问题，它具有轮换对称的特点，形式很美，简单易记.

海伦是古希腊的数学家，还是一位优秀的测绘工程师．他的代表作是《度量术》，此书讨论平面图形的面积、立体图形的体积，以及把图形分成几部分，使各部分的面积或体积的比等于给定的比．《测量仪器》是他的另一本代表作，其中描述的一种仪器，功能相当于现代的经纬仪．此书中还讨论了许多测量问题，如怎样挖隧道，从山的两侧开始，找准方向，使隧道准确会合；确定两点间高度的差；测量可望而不可即的两点之间的距离；还有各种高度和距离的测量问题．

我国南宋著名数学家秦九韶也发现了与海伦公式等价的由三角形三边来求面积的公式，他把这种方法称为“三斜求积”．在他的著作《数书九章》里有一个题目：“问有沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里．里法三百步．欲知为田几何．”这道题实际上就是已知三角形的三边长，求三角形的面积．《数书九章》中的求法是：“以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上，以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实．一为从隅，开平方得积．”如果把以上这段文字写成公式，就是

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

秦九韶独立推出了“三斜求积”公式．它虽然与海伦公式形式上不一样，但两者完全等价，充分说明我国古代学者已具有很高的数学水平．

秦九韶是我国古代数学家的杰出代表之一，他的《数书九章》概括了宋元时期中国传统数学的主要成就，尤其是系统总结和发展了高次方程的数值解法与一次同余问题的解法，提出了相当完备的“正负开方术”和“大衍求一术”，对数学的发展产生了广泛的影响．秦九韶是一位既重视理论又重视实践，既善于继承又勇于创新的数学家，被国外科学史家赞誉为最伟大的数学家之一．

1.7 平面向量的应用举例

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

1. 理解用向量方法解决平面几何问题的基本思路，领会几何问题向量化的“三部曲”操作方法.
2. 了解用向量方法解决物理问题的基本思想，渗透认识来源于实践又服务实践的辩证观点.

◆ 本节难点：

1. 把几何问题、实际问题转化为向量问题.
2. 从物理背景中建立向量模型，培养向量应用意识.

二、教材编写意图

本节的主要内容是通过例题来说明平面向量在解决数学问题中发挥的重要作用，以及在物理学等科学领域中的广泛应用. 向量的原型是力，力是物理对象，阿基米德用有向线段表示力，使它又成了几何对象；引入坐标系后，向量成了一对有序实数，从而又变成了代数对象，所以向量实际上沟通了物理和数学，在数学中又沟通了几何与代数.

用有向线段表示向量，使得向量可以进行线性运算和数量积运算，并具有鲜明的几何背景，从而沟通了平面向量与平面几何的内在联系，在某种条件下，平面向量与平面几何可以相互转化. 平行、垂直、夹角、距离、全等、相似等，是平面几何中常见的问题，而这些问题都可以由向量的线性运算及数量积表示出来. 因此，平面几何中的某些问题可以用向量方法来解决，但解决问题的数学思想、方法和技能，需要在实践中去探究、领会和总结.

同时，向量概念源于物理中的矢量，物理中的力、位移、速度等都是向量，功是向量的数量积，从而使得向量与物理学建立了有机的内在联系，物理中具有矢量意义的问题也可以转化为向量问题来解决. 因此，在实际问题中，如何运用向量方法分析和解决物理问题，是一个值得探讨的课题.

三、教学建议

本节内容可以将例 1 和例 2 安排在第一课时，主要内容是平面向量在解决数学问题中的应用；将例 3、例 4 和例 5 安排在第二课时，主要内容是平面向量在物理学中的应用.

1. 向量在数学中的应用

向量是数学的重要概念之一，由于它具有代数形式和几何形式的“双重身份”，能融数形于一体，容易与中学数学的许多主干知识综合，形成知识的交汇点. 因此，它作为知识的载体，或作为解决问题的工具，几乎渗透到数学的所有分支之中. 如利用向量证明等式、不等式，求值(最值)，求函数值域等. 随着学习的深入，还可发现在即将学习的三角恒等变换、复数以及选修教材中的平面解析几何、导数、概率等都有着知识的交汇点，为命题者提供了优化创新试题的阵地，也为我们分析、解决问题开辟了新视角，教学时应高度重视向量在数学知识中的应用.

2. 向量在物理学中的应用

实际上是把物理问题转化为向量问题，然后通过向量运算解决向量问题，最后再用所获得的结果解释物理现象. 教学中要让学生注意两个方面，一方面是通过实例，体会如何把物理问题转化成数学问题，即如何将物理量之间的关系抽象成数学模型，另一方面是如何利用数学模型的解来解释相应的物理现象.

3. 例题的教学分析

例 1 是以正三角形为背景求数量积的最值问题. 用向量方法解决平面几何图形问题，首先要考虑是用向量的坐标表示还是用向量的几何表示，两种方法各有优势.

教材是用几何中的向量方法求解的，本题解答最开始引入多个向量，但最终运用化归思想将$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$表示为只含有向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{s}$(可以看作是平面上的一组基)，并转化为$\boldsymbol{s}$的二次函数，通过配方来求最小值. 通过这一求解方法可以让学生进一步熟练向量的代数运算，也为接下来证明平面几何问题提供了一种思路，即构造向量通过代数运算求解. 就方法而言，几何中的向量方法完全与几何中的代数方法一致，不同的只是用“向量和向量运算”来代替“数和数的运算”. 这就是把点、线、面等几何要素直接归结为向量，借助向量之间的运算进行讨论，然后把这些计算结果翻译成关于点、线、面的相应结果.

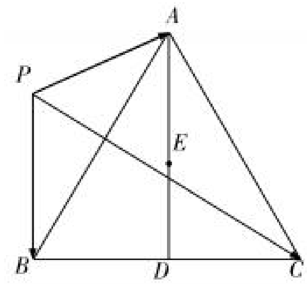
如果把代数方法简单地表述为：

[形到数]→[数的运算]→[数到形]，

则向量方法可简单地表述为：

[形到向量]→[向量的运算]→[向量和数到形].

本题还有如下解法供参考：

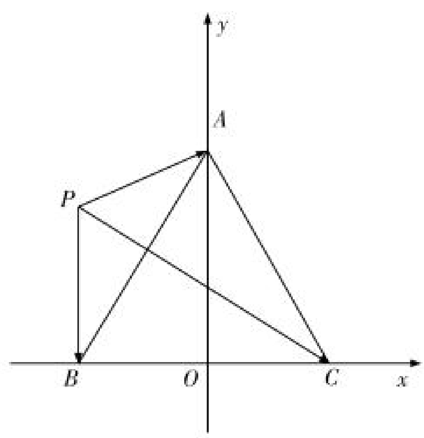


(方法一)取 BC 的中点 D，连接 AD，并取 AD 的中点 E，如右图，则$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$.

故$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{ED})$

$$=2(\overrightarrow{PE}^2+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED})=2\left(\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2\right)=2\overrightarrow{PE}^2-\frac{3}{2}.$$

当点 P 与点 E 重合时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值$-\frac{3}{2}$.



(方法二)以 BC 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，如右图，设 $P(x，y)$.

由△ABC 为等边三角形，且边长为 2，可得

$B(-1，0)$，$C(1，0)$，$A(0，\sqrt{3})$，

则$\overrightarrow{PA}=(-x，\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x，-y)$，

$\overrightarrow{PC}=(1-x，-y)$.

因而$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-1-x+1-x，-y-y)=(-2x，-2y)$，

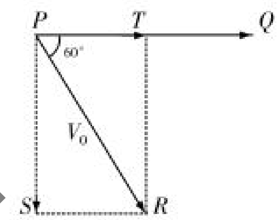
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})&=(-x)\cdot(-2x)+(\sqrt{3}-y)\cdot(-2y)\\&=2x^2+2y^2-2\sqrt{3}y\\&=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{2},\end{aligned}$$

当且仅当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 P 为 AO 的中点时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值$-\frac{3}{2}$.

例 2 通过向量之间的关系判断线段之间的关系，解题时应注意引导学生在平面几何的背景下，建立向量模型. 平行四边形是平面几何中学生熟悉的又一种基本图形，它有许多重要的性质，其中多数性质可以用向量方法进行证明. 通过本例可以让学生体会，由于向量能够运算，因此它在解决某些几何问题时具有优越性，它把一个思辨过程变成了一个算法过程，学生可按一定的程序进行运算操作，从而降低了思考问题的难度，同时也为计算机技术的运用提供了方便，教学时应引导学生体会向量带来的优越性.

例 3 需要分析比较要达到的目标速率与当时探测器平动速度的差异，以选择对策. 探测器原以 v_0 的速率向正 x 方向平动，看探测器需产生一个什么样的速率，使它与探测器原来的速率合成后变为 x 轴正方向偏 y 轴负方向 $60°$且大小为 v_0 的速率，然后再分析要产生这样的速率需要开动哪几台发动机.

本题还可参考下面解法.



如图，设$\overrightarrow{PQ}$表示探测器原平动的速度，$PQ=v_0$，$\overrightarrow{PR}$表示目标速度，$PR=v_0$，在所设固定直角坐标系中，将$\overrightarrow{PR}$分解，得

$$\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{2}v_0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\right).$$

由于$\overrightarrow{PR}$在 x 轴正方向的分速率$\frac{1}{2}v_0<v_0$，因此，可先开动发动机 P_1 一定时间，使沿 x 轴正方向平动减速.

由于$\overrightarrow{PS}$是指向 y 轴负方向的速度，故应再开动发动机 P_4 一定时间，使探测器沿 y 轴负方向产生需要的速度，因此(A)是正确的答案.

例 4 本例所得的结果反映了平面上三个共点力平衡的一般规律，在力学上叫作拉米定理，我们可以用它来处理三个共点力的平衡问题.

平面矢量中，若三个矢量的和为 $\mathbf{0}$，那么，它们的几何表示为首尾相接的一个三角形，我们称这种三角形为矢量三角形. 通过矢量三角形，可以把求矢量的长度、矢量间的夹角等问题，化归为解矢量三角形的问题，这对物理学来说，非常重要.

本题解题关键是找相应的“矢量三角形”，把物理问题转化成相关的数学问题. 如果用坐标法，那么关键在于记住在平衡状态下，各力在各轴的分力的代数和为 0.

例 5 本例要注意引导学生将实际情境抽象为数学模型，即把卫星运动在地表附近绕地球旋转运动的轨迹看作是以地心 O 为圆心，地球的半径 R 为半径的圆，并可计算出卫星运转一周的时间是 $T=\frac{2\pi R}{v}$.

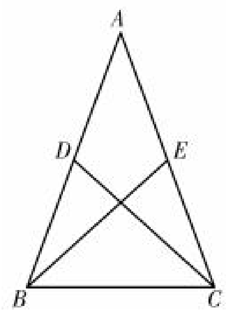
教师教学前应知道，人造地球卫星运行遵从的规律是卫星绕地球做匀速圆周运动，地球对卫星的引力提供向心力. 所谓发射速度是指卫星在地面附近离开发射火箭的初速度. 要发射一颗人造地球卫星，其发射速度就不能小于第一宇宙速度.

由平抛运动规律可知，抛出的物体不再落回到地面，必使物体运动轨迹的弯曲程度与地球表面的弯曲程度相同或更小，即至少使物体绕地球旋转的轨迹与地球表面相似且二者为同心圆，这样物体就不会落回地面了. 教师可参阅本书下页的“相关链接”.

★补充例题

例 1 在等腰△ABC 中，D，E 分别是两条腰 AB，AC 的中点，若 $CD\perp BE$，求 $\cos A$ 的值.

解：因为 D，E 分别是 AB，AC 的中点，则$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，



$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

因为 $CD\perp BE$，则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，即$\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=0$.

即$\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB})^2-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC})^2=0$.

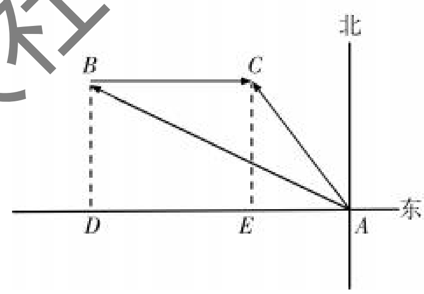
因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以$\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$.

故 $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{4}{5}$.

说明：通过本例进一步熟练向量在研究几何问题中的应用．用向量方法解决平面几何问题的基本思路为：几何问题向量化→向量运算关系化→向量关系几何化．这种转化既是一种数学思想，也是一种数学能力．其中合理设置向量，并建立向量关系，是解决问题的关键．

例 2　在风速为 160 km/h 的西风中，飞机以 160 km/h 的航速向西偏北 60°方向飞行，求在没有风时飞机的航速和航向．

解：如图，设飞机在无风时的速度为$\overrightarrow{AB}$，西风速度为$\overrightarrow{BC}$，则飞机的实际速度为$\overrightarrow{AC}$.



过点 A 作 $AD\,/\!/\,CB$，过点 B，C 分别作 AD 的垂线，垂足为 D，E．

在 Rt$\triangle AEC$ 中，因为 $AC=160$，$\angle CAE=60°$，则 $AE=80$，$CE=80\sqrt{3}$．

在 Rt$\triangle ADB$ 中，因为 $BD=CE=80\sqrt{3}$，$DE=BC=160$，则 $AD=AE+DE=240$．

所以 $\tan\angle BAD=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{80\sqrt{3}}{240}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得$\angle BAD=30°$，$AB=2BD=160\sqrt{3}$．

所以在没有风时飞机的航速为 $160\sqrt{3}$ km/h，航向为西偏北 30°．

说明：通过本例题熟练平面向量知识在实际生活中的应用，用向量知识解决生活中的实际问题时，要注意数形结合．一般先要作出向量示意图，必要时可建立直角坐标系，再通过解三角形或坐标运算，求有关量的值．在例题的讲解过程中应注意渗透“认识来源于实践又服务实践”的辩证观点，加强向量的应用意识，培养建模能力．

4. 相关链接

发射卫星为什么要达到第一宇宙速度

牛顿曾经研究过这样一个问题，人掷出去的石头，由于受到重力作用，总会偏离初方向落回地面．于是他提出了一个大胆的设想：在地球的一座高山上，架起一门水平的大炮，以不同的速度将炮弹平射出去，当炮弹的速度比较小时，炮弹会在重力作用下，偏离原来的运动方向落在附近的 A 点；如果增大炮弹的出射速度，炮弹就会做初速度更大的平抛运动，落在比 A 点更远的 B 点；如果继续增大炮弹的出射速度，炮弹就会飞得更远．

炮弹的出射速度越大，炮弹落点就离山脚越远．如果地面是个平面，即使炮弹出射速度再大，飞行

再远，炮弹最终也会落回地面．但是地球是圆的，这样炮弹就有可能不再落回地面，转而绕地球飞行了．实际上，地球对它的引力时刻指向地心，在这个力的作用下，如果炮弹初速度合适，轨迹就有可能是个圆，此时引力就充当向心力，炮弹环绕地球做匀速圆周运动，永远不会落地．这个初速度就是第一宇宙速度．

第一宇宙速度跟卫星的运行速度和发射速度有什么关系呢？运行速度，顾名思义，就是卫星在轨道上实际运行的速度．从能量的观点说，不考虑阻力的影响，在总能量一定的条件下，高度越高，势能就越大，动能就越小．如果卫星绕地球做匀速圆周运动，轨道半径越大，它的运行速度就越小．近地卫星因为其轨道半径最小，所以其运行速度最大．

发射速度指的是卫星发射之后，卫星与火箭分离时所达到的速度．那么不同卫星的发射速度又该如何比较呢？当卫星质量一定时，卫星的轨道半径越大，它所具有的机械能就越大，因此在发射这颗卫星时就必须要给它更大的速度，才能达到应该有的高度．也就是卫星的轨道半径越大，它的发射速度就越大．近地卫星因为其轨道半径最小，所以其发射速度最小．

随着卫星轨道半径变大，所需发射速度就变大，而运行速度却变小了，这是怎么回事呢？

原来卫星发射之后继续上升，受地球的引力作用，速度就会减小．只有近地卫星，因为轨道近似在地球表面，发射速度近似等于运行速度，其他轨道卫星发射之后要上升高度，受地球引力减速，所以最终运行速度都小于发射速度．所以近地卫星所需要的发射速度最小，并且近似等于它的运行速度．发射卫星所需要的最小速度就通过近地卫星运行速度来计算，卫星在地球表面做匀速圆周运动，万有引力充当向心力，运行速度等于 7.9 km/s，这就是第一宇宙速度．

第一宇宙速度与运行速度、发射速度都是不同的概念．第一宇宙速度是卫星的最小发射速度，同时也是卫星的最大运行速度．卫星上天发射速度必须要达到第一宇宙速度．至于到了天上，卫星的运行速度就可以低于第一宇宙速度了，且随着高度的增加而减小．

Ⅲ. 教学设计案例

1.1　向　量

1. 教学目标

（1）了解向量的实际背景，理解向量、零向量、向量的模、单位向量、相等向量、相反向量等概念及其本质特征，掌握向量的几何表示，会用字母表示向量，培养直观想象、数学抽象素养.

（2）明确向量与数量的联系与区别，能正确认识实际问题中的量是否为向量，能正确判断、推导和证明向量之间的相互关系，培养思维的严谨性，提高逻辑推理和表达能力.

2. 教学重难点

重点：向量的有关概念与表示.

难点：向量相关概念的理解及表示.

3. 教学基本流程

以位移为背景，引出向量

↓

明晰向量的表示

↓

理解相等向量与相反向量

↓

了解零向量定义

↓

归纳总结

4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问题</th><th>问题设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>从本章引言，我们知道位移是既有大小，又有方向的量，在物理学中如何表示位移？你还能举出物理学中这样一些实例吗？由此你能归纳出数学中向量的定义吗？</td><td>启发学生由位移的表示引入有向线段和向量的定义，并体会向量的实际背景和物理意义.</td><td>教师从学生熟悉的经验和感兴趣的问题开始，从而顺利地将学生引导到向量的学习中来. 学生通过观察、思考、总结、概括得出有向线段的三个要素的结论，并相互进行交流. 师生探讨得出向量定义.</td></tr>
<tr><td>时间、路程、功是向量吗？速度与加速度呢？</td><td>让学生进一步体会到向量的方向性.</td><td>教师引导学生类比得到数量的定义，并体会数量与向量的区别.</td></tr>
<tr><td>类比位移的表示方法，你能给出向量的表示吗？</td><td>类比有助于将学生认知进行迁移，顺利形成向量的知识.</td><td>学生通过小组合作讨论，得出向量的表示方法. 学生代表展示并发表见解. 师生一起总结向量的几种表示方法，并归纳得出字母表示时的注意事项.</td></tr>
<tr><td colspan="3">教师给出定义：向量$\overrightarrow{AB}$的大小就是有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度，称为向量$\overrightarrow{AB}$的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$.</td></tr>
<tr><td>由物理学知识知道，如果一个质点沿教材P. 3 图 1.1－3 所示的平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 从 A 运动到 B，或者沿 DC 边从 D 运动到 C，这两次位移虽然起点不同，但方向相同、长度相等，就称它们是相等位移(或相同位移). 你能类比得到相等向量的定义吗？</td><td>继续挖掘学生头脑中的原有认知——物理中相等位移的定义，帮助学生加深理解相等向量的定义.</td><td>学生独立思考得到结论，加深对相等向量的理解，类比有助于将学生认知进行迁移，顺利形成相等向量的概念.</td></tr>
<tr><td>结合教材图 1.1－3，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是相等向量吗？</td><td>通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解相等向量的定义.</td><td>学生独立思考，学生代表展示并发表见解.</td></tr>
<tr><td>类比相反数的定义，你能给相反向量下个定义吗？</td><td>类比学习是一种重要的学习方法，能充分提高学生的知识迁移能力.</td><td>学生首先独立尝试解决问题，再进行小组交流. 师生共同探讨得到相反向量的定义.</td></tr>
<tr><td>教材 P. 3 例 1.</td><td>让学生巩固相等向量与相反向量的概念.</td><td>学生独立思考完成此题. 教师关注学生对相等向量与相反向量的理解，帮助学生完整准确地理解向量的有关概念.</td></tr>
<tr><td>教材 P. 3 例 2.</td><td>使学生通过作图明确相等向量和相反向量的定义，提升学生的动笔作图能力.</td><td>学生自主探究，动笔作图. 师生借助图形理解相等向量和相反向量的定义. 教师可以引导学生规范作图.</td></tr>
<tr><td colspan="3">教师给出零向量的定义：如果向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小 $|\boldsymbol{a}|=0$，就称 $\boldsymbol{a}$ 是零向量，记作 $\mathbf{0}$.</td></tr>
<tr><td>零向量用有向线段如何表示？零向量的方向如何？</td><td>通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解零向量的定义及用有向线段表示 $\mathbf{0}$ 的物理意义.</td><td>学生独立思考，教师引导学生得到零向量的有向线段表示实际上是一个点，即停留在起点不动，所表示的位移为零. 并规定零向量的方向是任意的.</td></tr>
</table>

续表

问题	问题设计意图	师生活动
课堂检测：判断下列命题是否正确，若不正确，请简述理由. (1) 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. (2) 向量就是有向线段，有向线段就是向量.	让学生自己独立思考，完成练习，达到检测学习的效果.	教师总结，梳理知识结构.
课堂练习：教材 P. 4 练习 1，2，3. 目的是加深对向量相关概念的理解.		
作业：教材 P. 5 习题 1.1　1，3.		

1.2　向量的加法（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）从位移和力的合成角度来了解向量加法的物理背景，掌握向量加法运算的三角形法则和平行四边形法则；

（2）理解并会证明向量加法运算满足交换律和结合律，培养数学抽象素养.

（3）能运用向量的加法法则解决实际问题，会利用向量加法运算法则作两个向量的和向量，初步尝试用向量方法解决几何问题及实际问题，培养直观想象素养.

2. 教学重难点

重点：向量加法的几何运算法则.

难点：向量加法的代数运算性质.

3. 教学基本流程

由总位移引出向量的加法

↓

掌握向量的两个加法法则

↓

理解向量加法的运算律

↓

熟悉零向量的加法性质，并能灵活运用

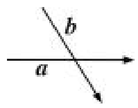
↓

总结提升

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
观察教材 P.6 图 1.2-1，一艘船从码头 O 出发先往东行驶 40 km 到达位置 A，再往北行驶 30 km 到达位置 B，思考总的位移是多少？	启发学生由位移的合成引入向量的加法.	学生回忆位移的合成的有关知识，通过观察、操作、思考，发现这艘船先从 O 到 A，再从 A 到 B，总的效果是从 O 到 B. 因而其总位移是 $\overrightarrow{AB}$. 体会位移的合成是把两个向量(矢量)“合”在一起了. 教师借机启发：这容易让我们想到向量可以像这样作加法运算. 这就点明了本节课首先研究向量的加法运算.
给出向量加法的定义.	师：求向量和的运算称为向量的加法.	
由位移的合成，你认为可以如何进行两个向量的加法运算？	由位移的合成引入向量加法的定义及其三角形法则.	学生借助位移的合成引入向量与向量之间的一种运算：向量的加法运算. 教师要关注全体学生对这个问题的理解，鼓励学生独立思考，进行交流. 最后，教师给出向量加法的三角形法则. 对于向量加法的三角形法则，教师要关注学生对它的意义的理解，强调向量的和的大小和方向.
如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，对于这种特殊情况，我们如何求它们的和？	借助特例，研究向量加法与实数加法的联系与区别，帮助学生认识共线向量的加法也适合向量加法的三角形法则，这样，更容易与数的加法进行类比，加强数形结合意识的培养.	学生自主探究，可以类比数的加法，也可以看成是三角形法则的特例，当两个向量共线时也符合“首尾相接，首尾连”的三角形法则. 必要时可以借助信息技术工具演示作图的过程，使学生有更直观的认识.
对于矢量的合成，物理学中还有其他方法吗？请看下面的问题：教材 P.7 图 1.2-4，在光滑的平面上，一个物体同时受到两个外力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用，你能作出这个物体所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 吗？由此你能给出向量加法的另一个法则吗？	继续挖掘学生头脑中的原有认知——物理中力的合成的实例，不仅帮助学生加深理解向量加法的定义，而且可以借助力的合成的平行四边形法则，引入向量加法的平行四边形法则.	学生独立思考、动手操作后，小组交流，最后师生由力的合成引入向量加法的平行四边形法则.
向量加法的平行四边形法则与三角形法则一致吗？为什么？	通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解向量加法的定义和两种加法法则，明确两个法则在本质上的一致性.	学生画图探索，学生代表展示并发表见解，师生共同归纳结论：向量加法的三角形法则和平行四边形法则本质上是一致的，解决具体的向量加法问题时，可以有选择地使用.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如何作向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$？ 	与数的加法相比，向量的加法复杂了许多. 为此，设置本问题明确如何作出两个向量的和，进一步帮助学生理解向量加法的定义、几何意义，强化学生的作图意识，帮助学生掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则.	学生首先独立尝试解决问题，再进行小组交流. 教师让学生代表展示向量加法的两个法则的作法. 必要时，师生一起通过信息技术工具，改变向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小和方向，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 教师要强调向量的和的方向，帮助学生明确向量加法的几何意义.
追问：在向量加法的作图中，你认为用三角形法则作图应注意什么？用平行四边形法则作图呢？		学生思考回答，教师概括：在向量加法作图时，向量起点可以在平面上任意选取，用向量的三角形法则作图时，两个向量首尾相连；而用平行四边形法则作图时应强调向量的起点放在一起；当两个向量共线时，采用三角形法则作两个向量的和.
请你用文字语言、符号语言、图形语言分别描述如何求两个向量的和.	促进学生多角度理解向量加法定义，教会学生理解一个数学概念的一般方法.	学生思考、交流. 教师组织多个学生用三种数学语言表述如何求向量的加法，教师关注学生对向量加法的理解，帮助学生完整准确地理解向量的加法法则.
从代数运算的角度理解，向量的加法是一种新的运算. 定义了一种新的运算，自然要研究其运算律的问题. 类比数的加法的运算律，你认为向量的加法是否也有运算律？先猜测有哪些运算律，并说明理由.	使学生明确研究向量加法运算律的途径，并寻找结论成立的依据，获得研究运算律的经验，提升逻辑推理素养.	学生自主探究，猜想交流. 师生借助图形证明向量加法的交换律和结合律. 对于向量加法的结合律的证明，学生可能存在一定困难，需要教师引导学生通过作图证明，并理解作图方法的多样性. 此处可以借助信息技术工具，演示作图的两个路径(实际上是质点运动选择的路径不同，异曲同工而已).
教材 P. 8 例 2.	使学生明白虽然零向量求和时不能以它们作为三角形的“两边”来作三角形，但仍然可以用三角形法则求和，并且满足加法的运算律.	学生自主探究，猜想并互相交流. 教师引导学生从图形上和字符运算两个角度来理解零向量的加法性质与有理数类似. 并给出定理“任意向量与零向量相加后保持不变，等于这个向量本身，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$”. 学生类比得到第 2 个问题的结论.
教材 P. 8 例 1.	体现向量加法在几何问题中的应用，要求学生能够把它转化为向量的加法运算，理解其中应解决的问题是证明相等向量，发展学生用向量方法解决几何问题的能力，体会向量的工具作用.	学生作出几何图形，将问题转化为向量加法问题，并依据向量加法定义及平面几何知识求解，给出解答过程和结果. 由于这是首个将几何问题转化为向量问题的例题，对有困难的学生，教师可以引导学生阅读题意，思考问题中与所学的哪些向量知识有联系，等等，并适当规范学生的书写.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
请学生独立完成教材 P.9 例 3，并思考：向量加法的三角形法则是否可以推广？	通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解向量加法的三角形法则，明确这个法则的几何运算需要首尾相接，并将其推广到多个向量求和的方法.	学生自主探究，猜想并互相交流. 对于用其他向量的加法表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$，学生可能存在一定困难，需要教师引导学生将它转化为三角形法则，并将两个向量的和推广到多个向量求和.
教材 P.9 例 4.	通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解向量加法来源于物理背景，并可以用于解决实际问题.	引导学生作出几何图形，将物理问题转化为向量加法问题，并依据向量加法定义及平面几何知识求解，给出解答过程和结果.
教材 P.9 例 5.	通过该问题的探讨，帮助学生更加深入地理解向量加法的运算律. 体会向量的和仍是一个向量，有方向和大小，并且尝试多角度地思考问题.	教师引导学生作出几何图形，观察正三角形的性质，利用整体思想，借助向量加法的交换律和向量的定义得到本题的解答. 启发学生思考，除了教材上所给的方法外，是否还有其他方法解决此题.
课堂练习：教材 P.10 练习 1，2，3. 目的是加深学生对向量的两种加法法则及其运算律的理解，体会零向量的运算性质.		
作业：教材 P.12 习题 1.2　1，2.		

1.3　向量的数乘（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）理解向量数乘运算的几何意义，掌握向量共线定理，知道向量的夹角.

（2）从特殊到一般，培养类比、归纳等思维能力和探索能力，加强向量的综合运算，培养数学抽象、逻辑推理素养.

2. 教学重难点

重点：向量的数乘运算及其几何意义.

难点：向量共线定理.

3. 教学基本流程

由作向量的倍数引出新课

↓

明确向量数乘的定义

↓

由特殊到一般，引出共线向量

↓

理解向量共线的条件

↓

知道向量的夹角

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，作出 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，作出 $\overrightarrow{OB}$ 的相反向量 $\overrightarrow{OC}$，并观察 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 有怎样的关系？	通过学生自己动手画图，直观感知 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的大小和方向，为后面的向量数乘定义做铺垫.	师：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$，记作 $2\boldsymbol{a}$，即 $\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=-2\boldsymbol{a}$，则 $2\boldsymbol{a}$，$-2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向有怎样的关系？ 生：$2\boldsymbol{a}$，$-2\boldsymbol{a}$ 的长度都是 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert$ 的 2 倍，$2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$-2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.
给出向量的数乘的定义、几何意义.	师：一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. (1) $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$； (2) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反； (3) $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 求向量实数倍的运算称为向量的数乘. 向量数乘的几何意义：把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向放大或缩小. 把向量的加法、减法、数乘运算统称为向量的线性运算，向量线性运算的结果仍是一个向量.	
已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，在直线 OA 外取一点 O'，作出 $\overrightarrow{O'B}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{O'C}=-3\boldsymbol{a}$. 分析向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 所在有向线段的位置关系.	指导学生从具体的两个向量所在直线的位置关系抽象出一般的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 所在有向线段的位置关系，体现特殊到一般的思想，从而给出共线向量的定义.	生：一般地，如果非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则可以将它们用同一条直线上的有向线段或互相平行的有向线段来表示. 师：当非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时，我们既称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，也称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行，并用符号“//”表示它们共线(或平行)，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定：零向量与所有的向量平行. 师：由向量平行和向量数乘的定义可知： 两个向量平行⇔其中一个向量是另一个向量的实数倍. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$⇔存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 即向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，当且仅当有唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，当且仅当有唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
直线 AB 与 CD 平行，如何用向量形式来表示？不同的三点 A，B，C 共线，如何用向量形式来表示？	加深学生对两个向量平行的理解.	师：直线 AB 与 CD 平行，如何用向量形式来表示？ 生：直线 AB 与 CD 平行$\Rightarrow$存在实数 λ，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$. 师：反过来成立吗？ 生：若存在实数 λ，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$，则 AB 与 CD 共线或平行. 师：不同的三点 A，B，C 共线，如何用向量形式来表示？ 生：A，B，C 三点共线$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$. 师：反过来成立吗？为什么？ 生：成立，因为$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$，又有公共点 B，所以 A，B，C 三点共线.
若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，x，y 为实数，则 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的等价条件是什么？ 若向量$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 A，B，C 三点共线，则实数 x，y 应满足什么关系？	加深学生对两个向量平行的理解，拓展对向量共线的应用.	师：若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，x，y 为实数，则 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的等价条件是什么？并说明理由. 生：等价条件是 $x=y=0$. 理由：若 $x\neq0$，则 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{y}{x}\boldsymbol{b}$， 从而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，矛盾！ 所以 $x=0$. 同理 $y=0$. 师：若向量$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 A，B，C 三点共线，则实数 x，y 应满足什么关系？ 生：设$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$， 则$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$， 即$\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$. 令 $x=1-\lambda$，$y=\lambda$，所以 $x+y=1$.
两个向量是否共线，还可以从其他角度来判断吗？	引进向量的夹角的定义.	师：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，任选一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则射线 OA，OB 所夹的最小非负角$\angle AOB=\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，取值范围规定为$[0,\pi]$. 师：设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ，请同学们分别分析 $\theta=0$，$\theta=\pi$，$0<\theta<\pi$ 时，两个向量的位置关系. 生：当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反. 这两种情况下 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，即它们所在直线重合或平行；当 $0<\theta<\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 师：当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 可以规定：零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 0，零向量与任一向量平行； 也可以规定：零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$，则零向量与任一向量垂直.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
请学生独立解答教材 P.15 例 1，例 2.	通过例题的练习，加深学生对概念的理解和应用.	生：独立解答例 1，例 2， 师：板书例 1，例 2 的解题过程.
课堂练习：教材 P.16 练习 1，2，3.		
课后作业：教材 P.20～21 习题 1.3　1，2，3，4，7，9.		

说明：本节难点是对向量共线的应用，故对这一内容要给学生足够的时间讨论、交流、论证，充分发挥教师的主导作用，学生的主体作用，从而突破难点.

1.4.1　向量分解及坐标表示

1. 教学目标

（1）理解平面向量基本定理，向量正交分解的含义，明确任何一个向量都可以用两个不共线的向量来表示，以及向量的坐标的几何意义.

（2）会用基底和坐标表示向量，渗透数形结合的数学思想，感受探索与创造的学习过程，培养逻辑推理、数学抽象、直观想象素养.

2. 教学重难点

重点：平面向量基本定理和向量的坐标表示.

难点：平面向量的合成与分解.

3. 教学基本流程

由如何刻画平面内的所有向量引出平面向量基本定理

↓

推导平面向量基本定理的合理性、唯一性

↓

掌握基本定理的运用

↓

由一般到特殊，引出正交分解

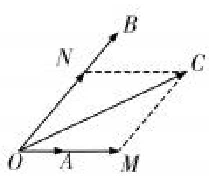
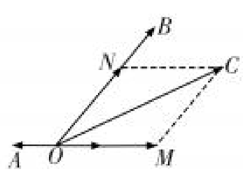
↓

会用坐标表示向量

↓

总结回顾

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
给定不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，取平面中的一点 O，作出 $\overrightarrow{OP_1}=2\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{P_1P}=3\boldsymbol{e}_2$.	回顾向量的数乘运算.	让学生明白可用一个向量刻画所有与其共线的向量.
如何作 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$？	引出向量分解的可能性.	师：结合刚才的作图，则有 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$. 一般地，若 $\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{P_1P}=y\boldsymbol{e}_2$，则 $\overrightarrow{OP}$ 用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 如何表示？ 生：$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.
这样进行向量分解唯一吗？	严格推理平面向量基本定理.	师：对于给定不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，当 x，y 改变时，$\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{P_1P}=y\boldsymbol{e}_2$ 改变，则 $\overrightarrow{OP}$ 改变；反过来，对于平面中的任意向量 $\overrightarrow{OP}$，均可以分解为两个不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍之和，即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$. 问：系数 x，y 是否唯一确定？ 生：由作图可得 x，y 唯一确定. 师：能否给出严格的证明？(引导学生采用反证法) 生：假设系数 x'，y' 满足 $\overrightarrow{OP}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$， 若 $x'\neq x$，则 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{y-y'}{x'-x}\boldsymbol{e}_2$，说明 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共线，这与已知矛盾，因此 $x'=x$. 同理可证 $y'=y$. 师：由此可得平面向量基本定理：设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线向量，则 (1)平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍之和，即 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中 x，y 是实数. (2)实数 x，y 由 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 唯一决定，也就是：如果 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$，则 $x=x'$，$y=y'$. 我们称不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成平面上的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$，分解式 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 中的系数 x，y 组成的有序数组 $(x,\ y)$，称为 $\boldsymbol{v}$ 在这组基底下的坐标.
设向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，$\overrightarrow{OC}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}$，则基底系数 x，y 的几何意义是什么？	加深对基底系数的理解，并为以后利用基底系数解题打下基础.	师：请同学们通过作图来考察坐标 x，y 的几何意义. 生：画出图 1. 图 1 图 2 $\lvert x\rvert=\dfrac{\lvert\overrightarrow{OM}\rvert}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert}$，$\lvert y\rvert=\dfrac{\lvert\overrightarrow{ON}\rvert}{\lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$. 师：补充图 2，进一步解释基底系数的符号与 $\overrightarrow{OC}$ 的位置关系.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
给定向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$，作出 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$，$\lvert\boldsymbol{e}_1\rvert=\lvert\boldsymbol{e}_2\rvert=1$，作出 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.	通过作图体会正交分解和单位正交基.	师：把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫作把向量正交分解. 设 $O(0,0)$，$E_1(1,0)$，$E_2(0,1)$，$P(x,y)$是平面直角坐标系内的四点，且 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$，则$\overrightarrow{OP}$在基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下的坐标是多少？ 生：$\overrightarrow{OP}$在基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下的坐标是$(x,y)$. 师：平面上两个互相垂直的单位向量组成的基，称为标准正交基，记作$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$，显然 $\boldsymbol{i}=(1,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1)$. 在平面直角坐标系中，若平面向量 $\boldsymbol{v}=(x,y)$，我们将它看成 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴、y 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成的基下的坐标，即 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OP}$，其中 $P(x,y)$. 反过来，平面上的任意一组标准正交基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，若$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则 $P(x,y)$就是向量$\overrightarrow{OP}$在基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下的坐标.
已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$，若 $\lvert\boldsymbol{v}\rvert=r$ 且 $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1\rangle=\alpha$，则 $\boldsymbol{v}$ 的坐标是多少？	进一步理解向量的坐标表示.	师：已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$，若 $\lvert\boldsymbol{v}\rvert=r$ 且 $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1\rangle=\alpha$，则 $\boldsymbol{v}$ 的坐标是多少？ 生：$\boldsymbol{v}=(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$.
学生独立完成教材 P. 23 例 1、P. 25 例 4、例 5.	通过例题的练习，加深学生对概念的理解和应用.	生：学生独立解答例 1、例 4、例 5. 师：板书例 1、例 5 的解答过程. 师：当基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 x，y 轴正方向相同的单位向量时，研究基底系数可转化成研究点的坐标问题.
课堂练习：教材 P. 25 练习 1，2.		
课后作业：教材 P. 29 习题 1.4　1，2.		

说明：本节课的难点是对基底系数几何意义的理解，故要让学生通过作图、讨论以及教师再补充完善来突破难点.

1.5.1　数量积的定义及计算

1. 教学目标

（1）了解平面向量数量积的物理背景，掌握平面向量数量积的定义、运算性质及其几何意义，明确平面向量数量积不满足结合律.

（2）会求向量的数量积、向量的模和夹角，加强知识的灵活运用. 渗透数形结合思想，培养数学运算、数学抽象、逻辑推理素养.

2. 教学重难点

重点：平面向量数量积的定义、运算性质及其几何意义.

难点：平面向量数量积的运算性质.

3. 教学基本流程

以物体受力做功为背景引入

↓

抽象出向量数量积的概念

↓

明晰向量数量积的定义

↓

给出向量投影的概念

↓

探究数量积的几何意义

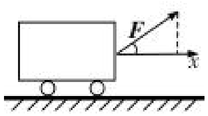
↓

探究数量积的运算律

↓

练习、交流、巩固、反馈

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
结合教材 P. 31 图 1.5-1，问力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 怎么求？  	从物体受力做功这个物理背景引入向量的数量积运算.	师：引导学生从拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角 θ 的大小情况分类思考并回答问题. 生：思考并回答问题，探究得到 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{s}\|\cos\theta$，其中 θ 是拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.
如何用文字语言来表述功的计算公式？如果我们将公式中的力与位移推广到一般向量，其结果又该如何表述？	抽象出向量数量积的概念，锻炼学生数学抽象的能力.	师：引导学生用文字语言来表述功的计算公式. 生：功是力与位移的大小及其夹角余弦的乘积. 师：若将公式中的力与位移推广到一般向量，其结果又该如何表述？ 生：结果是两个向量的大小及其夹角余弦的乘积. 师：给出数量积的定义：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是它们的夹角，则定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.
向量的数量积与向量的数乘有区别吗？$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值符号与 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的范围有什么关系？ 请学生自己动手做教材 P. 32 例 1，P. 33 例 2.	明晰数量积的定义，加深对数量积概念的理解.	师：注意“·”是数量积的运算符号，不能省略，也不能用“×”代替. 向量的数量积与向量的数乘有区别吗？ 生：向量的数量积是两个向量之间的运算，结果是一个数量；向量的数乘是一个向量和一个数量之间的运算，结果还是一个向量. 师：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值符号与 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的范围有什么关系？ 生：当 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<90°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；当 $90°<\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 师：零向量与任一向量的数量积为 0. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 学生做例 1，例 2 时，教师应规范书写格式.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
向量运算中的加法、减法、数乘都有几何意义，数量积运算有没有几何意义？	类比前面向量线性运算的学习方法，探索数量积的几何意义，引出投影的概念.	师：动画展示投影的形成过程，形成概念. 生：积极思考，明白投影向量、投影长的概念，$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的投影为$\lvert\overrightarrow{OB}\rvert\cos\alpha$.
你能从投影的角度解释平面向量数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$吗？	探究数量积的几何意义，深入理解向量的数量积运算.	师：引导学生探究发现数量积的几何意义. 生：参与交流、讨论，表述数量积的几何意义.
类比乘法的运算律，向量的数量积是否也满足下列运算律呢？①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；②$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.	类比数量的乘法运算，探究数量积的运算律，加深对数量积的定义及几何意义的理解.	师：组织学生交流讨论，鼓励学生表达自己的看法. 生：自主思考，学生之间讨论交流，表述自己的观点. 师：数量积满足交换律和对数乘的结合律，通过定义直接可以得到. 数量积分配律的证明需要教师引导学生从数量积几何意义角度去构造图形进行证明.
例题讲解：(1)教材 P. 35 例 3. (2)已知$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=3$，$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为________. (3)已知$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=6$，$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，求$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.	通过例题的练习，加深对数量积的定义、投影的概念、数量积的运算律的理解.	生：独立解答(1). 师：总结实数的某些计算公式也适合于向量的计算. 生：独立解答(2)，并交流. 师：总结. 生：板书(3)的步骤. 师：点评(3)的解题步骤.
课堂练习：教材 P. 35 练习 1，2，3，4. 目的是加深学生对数量积的理解，以及加强数量积运算的运用.		
作业：教材 P. 39 习题 1.5　2，3，4.		

1.6.2　正弦定理（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）理解并掌握正弦定理的证明.

（2）运用正弦定理解三角形.

（3）培养学生的逻辑推理、数学运算、数学抽象素养.

2. 教学重难点

重点：正弦定理的探索和证明及其基本应用.

难点：已知两边和其中一边的对角解三角形时判断解的个数.

3. 教学基本流程

由是否能将三角形中边角关系进行准确量化的表示引入

↓

由正弦定理在直角三角形中成立推出在一般三角形中也成立

↓

讨论解三角形的问题可以分为几种类型

↓

应用正弦定理解三角形

↓

判断已知两边和其中一边的对角解三角形时解的个数

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
余弦定理及其推论分别给出了已知两边一角、已知三边直接解三角形的公式. 如果已知两角和一边，是否也有相应的直接解三角形的公式呢？在直角三角形中，能得到三边与三角之间的关系式吗？	通过探究，提高学生分析问题、解决问题的能力.	根据锐角三角函数得出直角三角形中的正弦定理.
对于一般的三角形，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 仍然成立吗？	通过思考，分析在锐角三角形、钝角三角形中该式子成立，得正弦定理，提高学生分析问题的能力和概括能力.	分析直角三角形中的正弦定理，考察结论是否适用于锐角三角形，可以发现 $a\sin B$ 和 $b\sin A$ 实际上表示了锐角三角形 AB 边上的高. 这样，利用这个高的两个不同表示，就容易证明锐角三角形中的正弦定理. 由此，还得到了三角形面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 等.
是否可以用其他方法证明正弦定理？	教材上利用了锐角三角函数以及三角形面积证明，教师可以引导学生用向量方法证明，体现向量的工具作用.	在向量运算中，两个向量的数量积与向量的长度、角度有关，这就启示我们可以用向量的数量积来探究. 教师引导，学生自己完成.
应用正弦定理可以解决哪些类型的解三角形问题？怎样求解？	引导学生就解三角形问题作分析、归纳和总结.	师生一起总结：①已知三角形的任意两角及一边可以求其他边；②已知三角形的任意两边与其中一边的对角可以求其他角的正弦值.
教材 P. 45 例 4，例 5，例 6.	通过练习巩固本节所学知识，通过解决问题，感悟其中蕴含的数学思想，增强学生的应用意识.	学生自己完成，教师点评并板书解答过程.
由例 6 可以发现，已知两边和其中一边的对角解三角形时，会出现两解的情况，还会出现其他情况吗？	培养学生的探究意识.	学生讨论并进行总结，教师点评.
作业：教材 P. 52 习题 1.6　4，5.		

1.7　平面向量的应用举例（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）理解用向量方法解决平面几何问题的基本思路，领会几何问题向量化的操作方法.

（2）渗透数形结合和化归转化的数学思想，培养数学想象、几何直观、逻辑推理素养.

2. 教学重难点

重点：用向量方法解决平面几何问题的基本思想.

难点：平面几何问题转化为向量问题.

3. 教学基本流程

回顾旧知，导入新课

↓

教材例 1 教学

↓

教材例 2 教学

↓

用向量方法解决平面几何问题步骤总结

↓

强化巩固

↓

尝试小结

↓

布置作业

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
请学生思考： ①平面向量的运算法则及其几何意义是什么？ ②平面向量是如何把“数”和“形”联系在一起的？	回顾前面已学的向量知识，导入新课.	师：导入问题，展示问题情境. 由于向量的线性运算和数量积运算具有鲜明的几何背景，平面几何的许多性质，如平移、全等、相似、长度、夹角等都可以由向量的线性运算及数量积表示出来，因此，可用向量方法解决平面几何中的一些问题. 本节课将通过几个具体实例，说明向量方法在平面几何中的运用. 生：回顾，思考，进入新课学习.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
教材 P. 54 例 1.	引导学生建立平面几何与向量的联系，通过向量运算等知识解决几何问题.	师：画出图形，引导学生对例 1 提出的问题进行探究、证明. 引导：向量法，必须先把线段用向量表示，如何选基底？涉及长度问题常常考虑向量的哪种运算？ 等学生表示出以后，如何求出式子的最小值？ 生：在教师的引导下“选基底”，表示出$\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，然后将其转化为二次函数求最值的问题来求解.
教材 P. 54 例 2.	进一步体会向量知识在解决几何问题中的作用.	师：(1)引导学生将几何问题转化为向量问题(怎样选基底，表示出所需要的向量). (2)引导学生思考：例 2 还有其他解法吗？ 生：(1)积极思考，找出问题的突破口； (2)构建向量，进行向量运算； (3)把运算结果“翻译”成几何关系.
根据例 1、例 2，你能总结出向量法解决几何问题的步骤吗？	总结用向量方法解决平面几何问题的步骤.	师：引导思考向量法可以解决几何中的哪些问题，一般步骤是什么？ 生：反思例 1、例 2，归纳步骤. 用向量法解决几何问题的“三部曲”：①建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；②通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；③把运算结果“翻译”成几何关系.
练一练：在等腰$\triangle ABC$中，D，E分别是两条腰AB，AC的中点，若$CD\perp BE$，求$\cos A$的值.	强化巩固向量法在几何问题中的应用.	师：引导学生画出图形，将其转化成向量问题求解. 生：思考、讨论、交流解题思路. 师：点评学生思路，适当引导，板书过程.
小结：哪些几何问题中可以用向量去解决？用向量方法解决平面几何问题的基本思路是怎样的？	课堂小结，归纳提高.	师生共同总结：平面几何中有关平行、垂直、夹角、距离等问题，可以利用向量方法来解决. 用向量方法解决平面几何问题的基本思路：几何问题向量化→向量运算关系化→向量关系几何化. 用向量方法研究几何问题，既是一种数学思想，也是一种数学能力. 其中合理设置向量，并建立向量关系，是解决问题的关键.
课堂练习：教材 P. 58 练习 1. 目的是加深向量方法在几何问题中的应用.		
作业：教材 P. 59 习题 1.7　4.		

Ⅳ. 本章小结与评价

本章学业要求

1. 能够从多种角度理解平面向量的概念和运算法则.

2. 能够掌握平面向量基本定理.

3. 能够运用向量运算解决简单的几何和物理问题，知道数学运算与逻辑推理的关系.

4. 能够掌握余弦定理、正弦定理，能够运用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

重点提升数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模素养.

本章小结

1. 本章内容与物理学联系紧密，小结复习时可从物理、几何、代数三个角度展开本章内容的研究，形成贯穿全章的三条主线.

从物理的角度，教学时应注意从丰富的物理背景中总结向量内容. 例如，借助位移、速度等现实中的常见现象，让学生认识引进向量的必要性，并得出向量是既有大小又有方向的量，给出向量的概念. 又如，从位移的合成、力的合成引入向量加法的三角形法则与平行四边形法则. 再如，从力的分解引出平面向量基本定理，建立基的概念和向量的坐标表示. 这样做有助于学生形成有关的概念，引出有关的定理. 另外，引导学生应用向量解决物理问题，让学生在解决实际问题的过程中把握本章内容与实际的联系.

从几何的角度，应注重培养学生建立向量运算体系，突出运算的几何意义，并让学生熟练运用几何的一些基本定理证明运算的性质，通过几何直观让学生了解向量投影以及投影向量的意义. 另外，引导学生运用向量解决几何问题，特别是用向量方法证明余弦定理、正弦定理，要让学生掌握平面几何中的向量方法，有助于提高学生的直观想象素养.

从代数的角度，向量属于代数学中向量空间的内容，教学时应遵循向量空间结构体系理论，并充分考虑高中学生的认知基础和特点，把向量及其运算与数及其运算联系起来，在研究的思想方法上进行类比. 即在教学时应始终注意在向量空间结构体系理论这条“暗线”的指导下，把与数及其运算进行类比作为“明线”，这种类比可以帮助学生打开讨论向量问题的思路，同时还能使向量学习找到合适的思维固着点.

2. 要注意回顾与重现本章学习中运用向量解决问题的思路与方法，提升学生的数学运算素养. 例如，在介绍平面几何中的向量方法时，要结合例题总结用向量方法解决平面几何问题的步骤；在介绍向量在物理中的应用时，要结合例题分析用向量方法解决物理问题的思路；在介绍余弦定理和正弦定理时，要指出借助向量的运算探索三角形的边长与角度关系的思路与方法，并说明如何运用余弦定理和正

弦定理解三角形，让学生掌握平面向量的运算并加以应用，可以加深学生对平面向量的认识，提升他们的运算素养，也为他们在选择性必修课程中掌握空间向量的运算及应用起到示范作用.

3. 为让学生从整体上把握本章内容，应引导学生借助知识结构框图来总结有关内容，培养学生从所学知识中提炼知识结构和联系，结合课后练习进行知识回顾反思. 这样，有助于学生掌握本章各项内容的来龙去脉，有利于学生理解和掌握相应的内容，从而获得“四基”，增强“四能”，提升数学学科核心素养.

本章评价建议

1. 对基础知识、基本技能的评价

本章应特别关注学生是否清楚向量与每一个新的向量运算对象的获得过程，以及研究这些数学对象的主要脉络. 如学生是否理解向量是由物理中的位移、力、速度抽象而来，理解向量的几何意义，真正体会向量集代数与几何于一身；能否类比数的运算，结合相关的物理模型引入向量的加法运算和数量积运算；能否根据平面向量基本定理，真正掌握平面向量的正交分解及坐标表示，由此体会向量运算的代数化(坐标化)过程；能否用坐标表示向量的线性运算和数量积运算，并能抓住一些特殊向量的线性运算和数量积运算，发现其几何特征(平行、垂直、距离、夹角等)，体会其几何意义，进而能运用它们解决简单的平面几何、物理等问题；能否借助向量运算发现并证明余弦定理、正弦定理，并用它们解决与三角形有关的问题或简单的实际问题，进而体会平面向量与代数、平面几何、物理和三角函数等知识之间的联系.

2. 对思想方法的评价

(1) 要特别关注学生能否运用类比的思想方法. 如能类比物理中的力、速度、位移理解平面向量的概念；能类比实数的表示及运算规则，提出向量的有关运算与运算规则等.

(2) 要特别关注学生能否运用数形结合的思想方法. 如学生能否运用向量集代数与几何于一身的特点，不仅会向量的线性运算、数量积运算，还能自觉主动地发现这些运算的几何意义；不仅了解向量投影的概念，而且能借助投影的直观性，推导向量数量积的运算律；不仅会用坐标表示向量的线性运算、数量积，还能发现用坐标表示的向量运算结果的几何意义，体会这一过程中数与形的有机结合，从而解决相关的平面几何、物理、解三角形等问题.

(3) 要特别关注转化与化归思想的渗透. 如学生能否选择合适的基底表示其他向量，或将向量坐标化；能否体会向量运用的“三部曲”中，不同数学对象的相互转化关系；能否体会向量问题与物理问题的相互转化等问题.

3. 对关键能力的评价

(1) 要特别关注学生能否形成由具体到抽象的思维品质. 如学生能否根据物理中的位移、速度等抽象出向量的概念，能否领悟由物理中位移的合成、力的合成、力所做的功分别引入相关的向量运算的过程，领悟由特殊到一般、由具体到抽象的向量的运算、运算性质和平面向量基本定理等重要知识的形成过程和认知规律. 对于向量的加法、减法等向量运算法则的形成，对于其运算律的发现和证明，要让学生充分经历自主观察、操作、类比、推理、归纳、证明的全过程，鼓励学生发现和提出数学问题，不应单纯评价对运算法则与运算性质的记忆，而应注重对数学本质的理解和思想方法的把握，结合具体问题

进行评价，避免片面强调机械模仿、死记硬背和过高技巧.

（2）要特别关注学生能否提升数学运算的核心素养. 如能否理解向量线性运算、数量积，能推导运算性质；能否在具体问题中，认识向量运算的背景、借助物理情境发现运算法则，设计运算程序，解决与向量有关的数学或物理问题，体会向量运算与实数运算的异同；能否在综合情境中，借助向量表示和运算解决有关的问题，发现和提出某种数学对象的运算法则，探索其不同的数学内涵和运算规律的经验；能否整体把握各种向量概念和运算提出的背景、定义、几何意义和运算规律，以及体会这些知识产生运用过程中渗透的数学思想方法，为学生进一步学习复数及其运算等内容打好基础.

本章检测试题

一、 选择题

1. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，下列命题正确的是（　　）

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

B. 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{c}|$

C. 若 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2, 4)$，$\boldsymbol{b}=(x, -6)$，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 x 的值为（　　）

A. -3　　　　B. -12

C. 3　　　　D. 12

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，O 为对角线 AC 与 BD 的交点，则 $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=$（　　）

A. $2\overrightarrow{OA}$　　　　B. $2\overrightarrow{OB}$

C. $2\overrightarrow{OC}$　　　　D. $2\overrightarrow{OD}$

4. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）

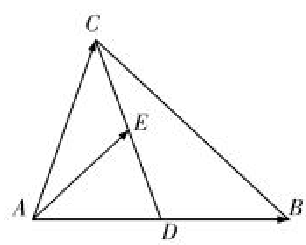
A. 30°　　　　B. 60°

C. 120°　　　　D. 150°

5. 如图，在△ABC 中，D 为 AB 的中点，E 为 CD 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为基底，则向量 $\overrightarrow{AE}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　　　B. $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　　　D. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$



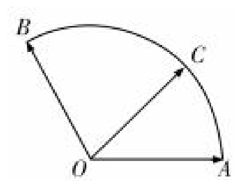
（第 5 题）

6. 一条河的两岸平行，河水从西向东流去，一艘船从河的南岸某处出发驶向北岸. 已知船的速度 $|\boldsymbol{v}_1|=20$ km/h，水流速度 $|\boldsymbol{v}_2|=10$ km/h，要使该船行驶的航程最短，则船速 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向与河道南岸上游的夹角为（　　）

A. 30°　　　　B. 45°

C. 60°　　　　D. 90°

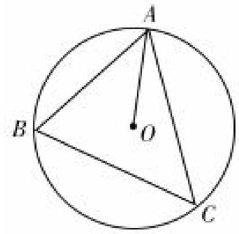
7. 给定两个长度为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 120°. 如图所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动. 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x，$y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是（　　）



（第 7 题）

A. 1　　　　B. -1　　　　C. 2　　　　D. -2

8. 如图，$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，$AB=2$，$AC=3$，$BC=\sqrt{7}$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$等于（　　）



（第 8 题）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$

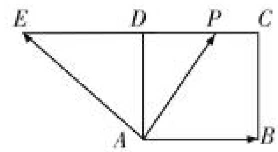
C. 2　　D. 3

9. 在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 BC，AC 边上的点，且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $-\frac{5}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{3}{4}$

10. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，延长 CD 至 E，使得 $DE=CD$，点 P 在线段 CD 上运动. 设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$，则 $x+y$ 的取值范围是（　　）



（第 10 题）

A. $[1,2]$　　B. $[1,3]$

C. $[2,3]$　　D. $[2,4]$

11.（多选题）已知$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $B=\frac{\pi}{3}$，$a+c=\sqrt{3}b$，则$\frac{a}{c}=$（　　）

A. 2　　B. 3

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

12.（多选题）点 O 在$\triangle ABC$ 所在的平面内，则以下说法正确的有（　　）

A. 若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，则点 O 为$\triangle ABC$ 的重心

B. 若$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}-\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right)=0$，则点 O 为$\triangle ABC$ 的垂心

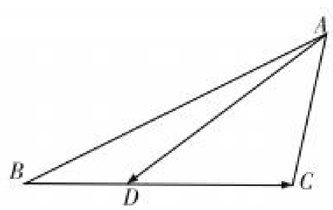
C. 若$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则点 O 为$\triangle ABC$ 的外心

D. 若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 为$\triangle ABC$ 的内心

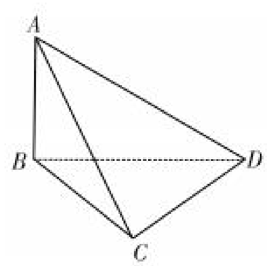
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则$|\boldsymbol{b}|$的最大值是________.

14. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$AC=1$，D 是 BC 边上一点，且$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为________.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，要测量底部不能到达的电视塔 AB 的高度，在 C 点测得塔顶 A 的仰角是 45°，在 D 点测得塔顶 A 的仰角是 30°，并测得水平面上的$\angle BCD=120^\circ$，$CD=40$ m，则电视塔的高度为________m.

三、 解答题

16. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$\frac{\sqrt{2}c-a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$.

(1) 求角 B 的大小(其中 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$)；

(2) 设 D 为 BC 边上的一点，若 $AC=7$，$AD=5$，$CD=3$，求 AB 边的长.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且$(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=35$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

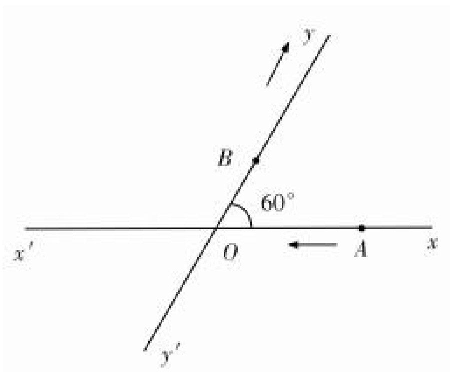
(2) 设向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，当 $\lambda\in[0,1]$时，求$|\boldsymbol{c}|$的取值范围.

18. 如图所示，有两条相交成 60°的直线 xx'，yy'，其交点是 O. 甲、乙两辆汽车分别在 xx'，yy'上行驶，起初甲在离 O 点 30 km 的 A 处，乙在离 O 点 10 km 的 B 处，后来两车均以 60 km/h 的速度，甲沿 xx'方向，乙沿 yy'方向行驶.

(1) 起初两车的距离是多少？

(2) t h 后两车的距离是多少？

(3) 何时两车的距离最短？



(第 18 题)

参考答案

一、选择题

1. C 2. A 3. D 4. C 5. B 6. C 7. C 8. B 9. A 10. C 11. AC 12. AC

二、填空题

13. 6 14. -2 15. 40

三、解答题

16. (1) 由已知可得$(\sqrt{2}c-a)\cos B=b\cos A$，由正弦定理，得

$\sqrt{2}\sin C\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，即$\sqrt{2}\sin C\cos B=\sin(A+B)=\sin C$.

因为 $\sin C\neq 0$，则$\sqrt{2}\cos B=1$，即 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $0°<B<180°$，所以$\angle B=45°$.

(2) 在$\triangle ACD$ 中，因为 $AC=7$，$AD=5$，$CD=3$，由余弦定理，得

$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{25+9-49}{30}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\angle ADC=120°$.

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，则

$AB=\dfrac{AD\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\dfrac{5\sin 60°}{\sin 45°}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

17. (1) 因为$(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=35$，则 $2|\boldsymbol{a}|^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=35$.

因为$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，则 $32-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-27=35$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$.

又 $\theta\in[0,\pi]$，则 $\theta=120°$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

(2) 因为$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|^2=16-12\lambda+9\lambda^2=9\left(\lambda-\dfrac{2}{3}\right)^2+12$，则$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{9\left(\lambda-\dfrac{2}{3}\right)^2+12}$.

因为$\lambda\in[0,1]$，则当$\lambda=\dfrac{2}{3}$时，$|\boldsymbol{c}|$取最小值$2\sqrt{3}$；当$\lambda=0$ 时，$|\boldsymbol{c}|$取最大值 4，所以$|\boldsymbol{c}|$的取值范围是$[2\sqrt{3},4]$.

18. (1) 设甲、乙两车最初的位置为 A，B，则

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60°=700$，故$|\overrightarrow{AB}|=10\sqrt{7}$ km.

(2) 设甲、乙两车 t h后的位置分别为 P，Q，

则$|\overrightarrow{AP}|=60t$，$|\overrightarrow{BQ}|=60t$.

当 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$|\overrightarrow{PQ}|^2=(30-60t)^2+(10+60t)^2-2(30-60t)(10+60t)\cos 60°$.

当 $t>\dfrac{1}{2}$时，$|\overrightarrow{PQ}|^2=(60t-30)^2+(10+60t)^2-2(60t-30)(10+60t)\cos 120°$.

上面两式可统一为$|\overrightarrow{PQ}|^2=10\ 800t^2-3\ 600t+700$，

即$|\overrightarrow{PQ}|=10\sqrt{108t^2-36t+7}$ km.

(3) 因为$|\overrightarrow{PQ}|=10\sqrt{108t^2-36t+7}$ km，

故当 $t=\dfrac{1}{6}$ h，即在第 10 min 末时，两车距离最短，最短距离为 20 km.

Ⅴ. 教材练习（习题）答案

1.1　向　量

练习（第 4 页）

1. 略　2. D

3. (1) $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{CB}$　(2) $\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AF}$

(3) 共 23 个，具体略

习题 1.1（第 5 页）

1. 略

2. 与$\overrightarrow{PQ}$ 相等：$\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{RC}$；与$\overrightarrow{PQ}$ 相反：$\overrightarrow{RA}$，$\overrightarrow{CR}$

3. (1) $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}$　(2) $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{DB}$　(3) $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{FC}$

4. (1) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MD}$，$\overrightarrow{BN}$，$\overrightarrow{NC}$ 中任取两个，共 6 对；$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{DM}$，$\overrightarrow{NB}$，$\overrightarrow{CN}$ 中任取两个，共 6 对；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{DC}$ 中任取两个，共 3 对；$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{NM}$，$\overrightarrow{CD}$ 中任取两个，共 3 对.

所以在模为 1 的向量中，相等的向量有 18 对.

(2) 相等的向量是 $\overrightarrow{AN}$ 和 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{NA}$ 和 $\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{BM}$ 和 $\overrightarrow{ND}$，$\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{DN}$.

所以在模为$\sqrt{2}$ 的向量中，相等的向量有 4 对.

5. 与向量$\overrightarrow{OA}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CB}$，$\therefore m=3$.

与$\overrightarrow{OA}$ 方向相同或相反，模相等的向量有 7 个. 与$\overrightarrow{OA}$ 不共线，模相等的向量有 16 个.

所以，与向量$\overrightarrow{OA}$ 的模相等的向量的个数 $n=16+7=23$.

1.2　向量的加法

练习（第 10 页）

1. 略　2. ①③　3. C

练习（第 11 页）

1. 略

2. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

3. (1) $\overrightarrow{CA}$　(2) $\overrightarrow{DC}$　(3) $\overrightarrow{AB}$

习题 1.2（第 12 页）

1. (1)$\boldsymbol{c}$　(2)$-\boldsymbol{f}$　(3)$-\boldsymbol{f}$　(4)$\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f}$　(5)$\boldsymbol{0}$

2. $\mathbf{0}$

3. (1) 略 (2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

4. $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

5. $\overrightarrow{CA}$

6. (1) $\overrightarrow{AD}$ (2)$\mathbf{0}$ (3) $\overrightarrow{CA}$

7. ∵① 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，由三角形两边之和大于第三边可得 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

② 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且同向时，$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

③ 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且反向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

∴ 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 成立.

8. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 均不共线时，能构成三角形.

9. (1) 设 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$.

∵O 为正五边形 $ABCDE$ 的中心，∴$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OE}|$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$，∴$\boldsymbol{s}$ 旋转 72° 仍等于 $\boldsymbol{s}$.

∴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{0}$.

(2) 设 $\boldsymbol{t}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$.

∵O 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，

∴$|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OA_2}|=\cdots=|\overrightarrow{OA_n}|$，$\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\cdots=\angle A_nOA_1=\dfrac{360^\circ}{n}$，

∴$\boldsymbol{t}$ 旋转 $k\cdot\dfrac{360^\circ}{n}(k\in\mathbf{N}_+)$ 仍为其自身，∴$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$.

10. (1) 取 BC 中点 M，连接 OM.

∵$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AH}$，∴$\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{AH}$.

又$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{BC}$，∴ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$. 同理可得$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$.

∴H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

(2) (1) 中结论仍成立.

1.3 向量的数乘

练习（第 16 页）

1. (1)1 (2)3 (3)-2

2. 略

3. ∵ $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，∴ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，∴ 四边形 $ABCD$ 为梯形.

练习（第 20 页）

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2$.

2. (1)$5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (2)$\boldsymbol{a}$ (3)$-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$

3. 略

4. $\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

习题 1.3（第 20 页）

1. (1) 略

(2) $\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B_2C_2}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

2. (1)M 为线段 AB 的中点.

(2)N 为线段 AB 上的一点(不包括端点).

3. A，B，C 三点共线，原因略.

4. $\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{MN}$，且$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

5. $\overrightarrow{AB}=6$，$\overrightarrow{BC}=7$，$\overrightarrow{CA}=-13$.

6. $\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$，$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

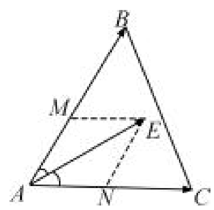
$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$.

7. (1) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)$\because \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\therefore QP\parallel MN$，且 $QP=MN$.

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 为平行四边形.

8. 如图，过点 E 作 $EM\parallel CA$ 交 AB 于 M，$NE\parallel AB$ 交 AC 于 N.



$\because ME\parallel AN$，$AM\parallel NE$，$\therefore ANEM$ 为平行四边形.

$\therefore \angle MAE=\angle EAN=\angle AEN=\angle AEM$，

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle AEN(\text{ASA})$，$\therefore AM=AN$.

又 $\because \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$，$\lambda\in\mathbf{R}$.

9. 设$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\therefore \overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=3\overrightarrow{MN}$.

$\therefore M$，N，C 三点共线.

10. 作直径 BD，连接 DA，DC.

则$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$，$DA\perp AB$，$AH\perp BC$，$CH\perp AB$，$CD\perp BC$，

$\therefore CH\parallel DA$，$AH\parallel DC$，$\therefore$ 四边形 $AHCD$ 是平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}$.

又$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$，

$\therefore \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

11. (1) 设 D 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$.

所以 $2\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GD}\Rightarrow\overrightarrow{GD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

所以，点 G 为线段 AD 靠近 D 点的三等分点.

(2) 由$\overrightarrow{GD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ 可知，G 点在 BC 边的中线上. 同理，G 点在边 AB，AC 的中线上.

所以，G 点为 $\triangle ABC$ 三条中线的交点，即为 $\triangle ABC$ 的重心.

12. 由$\frac{|AP|}{|PC|}=\lambda \Rightarrow \frac{|AP|}{|AC|}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

同理$\frac{|AN|}{|AB|}=\frac{\mu}{\mu+1}$. 所以$\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{AB}$.

由 G 为 CN 与 BP 的交点，可设$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AN}+(1-x)\overrightarrow{AC}=\frac{\mu x}{\mu+1}\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AP}+(1-y)\overrightarrow{AB}=\frac{\lambda y}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}+(1-y)\overrightarrow{AB}$.

由于$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 不共线，可得$\begin{cases}1-y=\frac{\mu x}{\mu+1},\\ 1-x=\frac{\lambda y}{\lambda+1}.\end{cases}$

由题意知 λ，$\mu>0$，解得 $y=\frac{\lambda+1}{\lambda+\mu+1}$. 所以$\overrightarrow{AG}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+1}\overrightarrow{AC}+\frac{\mu}{\lambda+\mu+1}\overrightarrow{AB}$.

同样可设$\overrightarrow{AM}=z\overrightarrow{AB}+(1-z)\overrightarrow{AC}$. 因为 A，G，M 三点共线，故$\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AG}$.

$\exists k\in\mathbf{R}$ 使$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AG}=\frac{\lambda k}{\lambda+\mu+1}\overrightarrow{AC}+\frac{\mu k}{\lambda+\mu+1}\overrightarrow{AB}\Rightarrow k\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+1}+\frac{\mu}{\lambda+\mu+1}\right)=1$

$\Rightarrow k=\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}$. 所以$\overrightarrow{AM}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}=-\frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{BM}$.

所以$\frac{|\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{BM}|}=\frac{\mu}{\lambda}$，即$\frac{|CM|}{|MB|}=\frac{\mu}{\lambda}$.

1.4 向量的分解与坐标表示

练习（第 25 页）

1. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$.

它们的坐标分别为 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(-2,-3)$，$\boldsymbol{d}=(2,-3)$.

2. (1)$k=-1$

(2)$(6,3k)$

练习（第 28 页）

1. $(4,4)$

2. (1)$\left(\frac{1}{2},2\right)$ (2)$(-1,-3)$

3. $\frac{16}{3}$

4. 略

习题 1.4（第 29 页）

1. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$d=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$.

它们的坐标分别为 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(-2,-3)$，$\boldsymbol{d}=(2,-3)$.

2. $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

3. (1)$(-2,3)$ (2)$(-5,-2)$

4. $D(1,5)$

5. $x=3$

6. $\lambda=1$，$\mu=-2$

7. (1)$M\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$

(2)$\left(-1,\dfrac{5}{3}\right)$或$\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$

8. 由中心对称知$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB'}$.

$\overrightarrow{AM}=(3,-2)$，$\overrightarrow{BM}=(-2,-4)\Rightarrow\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=(4,-1)$，

$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{BM}=(-1,-3)$.

所以点 A' 的坐标为$(4,-1)$，点 B' 的坐标为$(-1,-3)$，

$\overrightarrow{A'B'}=(-5,-2)=-(5,2)=-\overrightarrow{AB}$.

9. $C(5,-7)$，$D(-10,13)$，$E\left(-\dfrac{5}{2},3\right)$.

10. $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(5,7)$，

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(3,1)+(5\lambda,7\lambda)=(5\lambda+3,7\lambda+1)$.

$\therefore\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(2,3)+(5\lambda+3,7\lambda+1)=(5\lambda+5,7\lambda+4)$.

(1)P 点坐标为$(5\lambda+5,7\lambda+4)$，

P 点在直线 $y=x$ 上$\Leftrightarrow 5\lambda+5=7\lambda+4\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$.

(2)P 点在第四象限内$\Leftrightarrow\begin{cases}5\lambda+5>0,\\7\lambda+4<0\end{cases}\Leftrightarrow -1<\lambda<-\dfrac{4}{7}$.

11. 以 O 为原点，正东和正北分别为 x，y 轴正方向，建立平面直角坐标系. 过点 B 作 $BB_0\perp x$ 轴于点 B_0，过点 A 作 $AB_1\perp BB_0$ 于点 B_1. 过 A 点作 x 轴的垂线，交 x 轴于 B_2 点.

则$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_0}+\overrightarrow{B_0B}$.

$|\overrightarrow{OB_0}|=|\overrightarrow{OB_2}|+|\overrightarrow{B_2B_0}|=|\overrightarrow{OB_2}|+|\overrightarrow{AB_1}|=100\cos 15^\circ+160\sin 60^\circ$.

$|\overrightarrow{B_0B}|=|\overrightarrow{BB_1}|-|\overrightarrow{B_0B_1}|=160\cdot\cos 60^\circ-100\cdot\sin 15^\circ$.

而$\overrightarrow{OB_0}\perp\overrightarrow{BB_0}$，故$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB_0}|^2+|\overrightarrow{B_0B}|^2}\approx 241.3(\text{km})$.

所以从出发点 O 到港口 B 的直线距离为 241.3 km.

1.5 向量的数量积

练习（第 35 页）

1. (1)-10 (2)0 (3)10 (4)20 或 -20

2. (1)60° (2)120° (3)180° (4)30°

3. (1)$\dfrac{9}{5}$ (2)-4

4. (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos 90^\circ=|AC|^2+|\overrightarrow{CB}|^2$.

所以 $CA^2+CB^2=AB^2$.

(2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2+2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{DC}|\cos 90^\circ=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2$.

同理 $|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2\Rightarrow AC=BD$.

练习（第 39 页）

1. (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{41}$

(2) $-\dfrac{4}{5}$

2. (1) $k=19$　(2) $k=-\dfrac{1}{3}$

3. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,\ k-3)$. 由 $\triangle ABC$ 为直角三角形知，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 或 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 或 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$ 或 $k=\dfrac{11}{3}$ 或 $k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

经检验，上面的 k 值均能使 $\triangle ABC$ 成为直角三角形.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{13}\times\sqrt{\dfrac{13}{9}}=\dfrac{13}{6}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{\dfrac{13}{9}}=\dfrac{13}{6}$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{1+(k-3)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

所以当 $k=-\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{11}{3}$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{13}{6}$，当 $k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

习题 1.5（第 39 页）

1. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$

2. (1) $2\sqrt{3}$　(2) $4\sqrt{19}$　(3) 12

3. 60°

4. $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、y 轴正方向上的投影分别为 -2，$2\sqrt{3}$.

5. (1) -7　(2) -1

6. (1) 8　(2) -7　(3) 0　(4) 49

7. $k=-5$

8. $\lambda=-3$

9. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,\ -7)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(5,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2,\ -5)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+5^2}=|\overrightarrow{BC}|$.

而 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=10-10=0$，故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$.

故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

10. (1) $|OA|=5$，$|OB|=\sqrt{37}$，$|AB|=\sqrt{34}$.

(2) $\dfrac{14\sqrt{37}}{185}$

(3) $\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\dfrac{27}{5\sqrt{37}}\Rightarrow|BD|=|OB|\sin\angle AOB=\dfrac{27}{5}$

$\Rightarrow S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||BD|=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{27}{5}=\dfrac{27}{2}$.

11. (1) $k=\dfrac{9}{5}$　(2) $k=-\dfrac{29}{14}$

12. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})(-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})=-6|\boldsymbol{m}|^2+2|\boldsymbol{n}|^2+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\dfrac{7}{2}$,

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{4|\boldsymbol{m}|^2+|\boldsymbol{n}|^2+4\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}=\sqrt{4+1+4\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{7}$,

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{9|\boldsymbol{m}|^2+4|\boldsymbol{n}|^2-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}=\sqrt{9+4-12\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

13. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2-6=-8$，故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=-8\boldsymbol{c}=(-16,-8)$.

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(-2)-2=-4$，故 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=-4\boldsymbol{a}=(-8,-12)$.

从中可以发现，向量的数量积运算不满足结合律.

14. 若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1$ 或 -1，不成立.

故 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，即 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 可作为平面的一组基. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$,

则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=\lambda|\boldsymbol{e}_1|^2+\mu\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\lambda+\dfrac{1}{2}\mu=1$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\mu|\boldsymbol{e}_2|^2=\dfrac{1}{2}\lambda+\mu=1$.

解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{2}{3},\\ \mu=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{b}=\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,

$|\boldsymbol{b}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+1+2\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

1.6　解三角形

练习（第 43 页）

1. (1) $a=7$　(2) $\angle A=120°$　(3) $\angle B=90°$

2. $\dfrac{\cos B}{\cos C}=-\dfrac{b}{2a+c}\Rightarrow 2a\cos B+c\cos B=-b\cos C\Rightarrow-2a\cos B=c\cos B+b\cos C$.

由余弦定理得 $c\cos B+b\cos C=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a$.

从而 $\cos B=-\dfrac{1}{2}$. 而 $0°<\angle B<180°$，故 $\angle B=120°$.

3. 设 $\angle AMB=\alpha$，则 $\angle AMC=180°-\alpha$.

由余弦定理可得 $\cos\alpha=\dfrac{MB^2+AM^2-AB^2}{2MB\cdot AM}=\dfrac{AC^2-MC^2-AM^2}{2AM\cdot MC}$.

而 $MB=MC=\dfrac{1}{2}BC$，故 $\dfrac{1}{4}BC^2+AM^2-AB^2=AC^2-\dfrac{1}{4}BC^2-AM^2\Rightarrow$

$-\frac{1}{2}BC^2+AB^2+AC^2=2AM^2 \Rightarrow AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.

练习（第 47 页）

1. (1)$5\sqrt{2}$　(2)$10\sqrt{2}$
2. (1)45° 或 135°　(2)45°
3. $BD=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

练习（第 48 页）

1. (1)1　(2)$b=1$
2. $\angle C=45^\circ$ 或 135°
3. $\angle BAC=60^\circ \Rightarrow \angle BOC=120^\circ$. 而 $OB=OC$，故 $\angle OBC=\angle OCB=30^\circ$.

在 $\triangle OBC$ 中，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BOC}=\frac{OB}{\sin\angle BCO} \Rightarrow BC=\sqrt{3}R$.

$\triangle OBC$ 的外接圆半径为 $\frac{OB}{2\sin\angle BCO}=\frac{R}{2\times\frac{1}{2}}=R$.

所以，$\triangle ABC$ 的边长为 $\sqrt{3}R$，$\triangle OBC$ 的外接圆半径为 R.

练习（第 51 页）

1. 由题意可知 $\angle SAB=120^\circ-60^\circ=60^\circ$.

由余弦定理得 $SB=\sqrt{15^2+9^2-2\times15\times9\times\frac{1}{2}}=3\sqrt{19}$(km).

再由余弦定理得 $\cos\angle BSA=\frac{(3\sqrt{19})^2+15^2-9^2}{2\times15\times3\sqrt{19}}=\frac{7\sqrt{19}}{38}\approx0.803$.

所以 $\angle BSA=36.6^\circ$.

故这名学员从 B 点到 S 点的位移大小为 $3\sqrt{19}$ km，方向为北偏西 23.4°.

2. $\angle CBD=180^\circ-\angle ADB-\angle ADC-\angle DCB=60^\circ$,
   $\angle CAD=180^\circ-\angle ADC-\angle DCB-\angle ACB=30^\circ$.

由正弦定理得 $\frac{DC}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle DCB}$，$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{DC}{\sin\angle CAD} \Rightarrow$

$BD=\sqrt{2}$ km，$AD=3$ km.

由余弦定理得 $AB=\sqrt{BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB}=\sqrt{5}$(km).

即 A，B 两点之间的距离为 $\sqrt{5}$ km.

习题 1.6（第 52 页）

1. $\angle C=120^\circ$
2. 120°
3. 略
4. (1)$\frac{\sqrt{39}-3\sqrt{3}}{2}$　(2)$4+4\sqrt{3}$

(3)$7\sqrt{3}$　(4)$\angle C=75°$ 或 $15°$

5. 由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \angle C=60°$ 或 $120°$.

当 $\angle C=60°$ 时，$\angle B=90°$，$b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{9+27}=6$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

当 $\angle C=120°$ 时，$\angle B=30°=\angle A$，$b=a=3$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

6. $a=c=3$

7. (1)$\angle A=60°$　(2)$\angle B=30°$

8. 设靠近渔轮需时 t h，舰艇在 B 处与渔轮相遇，则 $\angle ACB=360°-135°-105°=120°$.

则由余弦定理得$(21t)^2=10^2+(9t)^2-2\times 10\times 9t\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$(舍去负值).

由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，$AB=21t$，$BC=9t\Rightarrow \sin\angle BAC=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

而 $0°<\angle BAC<60°$，故 $\angle BAC=21.8°$.

所以，舰艇的航向为北偏东 66.8°，靠近渔轮需时 40 min.

9. $AB=32.2\times\dfrac{1}{2}=16.1$(n mile)，$\angle BSA=60°-\angle BAS=40°$.

由正弦定理得$\dfrac{SB}{\sin\angle BAS}=\dfrac{AB}{\sin\angle ASB}\Rightarrow SB\approx 8.6$ n mile.

故灯塔到 B 处的距离为 8.6 n mile.

10. $\triangle ABC$ 为等腰三角形

11. 由四边形 $ABCD$ 为平行四边形，可设 $AO=OC=x$，$BO=OD=y$，$\angle AOD=180°-\theta$.

由$a<b$，$\cos\theta>0$，及余弦定理知：

$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$，$b^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta\Rightarrow 4xy\cos\theta=b^2-a^2$.

故 $S_{\square ABCD}=4S_{\triangle AOB}=4\times\dfrac{1}{2}xy\sin\theta=2xy\sin\theta$

$$=\frac{b^2-a^2}{2\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\tan\theta.$$

12. 连接 BD.

由余弦定理知 $BD^2=2^2+4^2-2\times 2\times 4\cos\angle BAD=6^2+4^2-2\times 6\times 4\cos(180°-\angle BAD)\Rightarrow$

$\cos\angle BAD=-\dfrac{1}{2}$.

故 $\angle BAD=120°$，$\angle BCD=180°-120°=60°$.

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$.

13. 两个外接圆大小相等，理由如下：

因为 $\angle ADB=180°-\angle ADC$，故 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$.

设 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的外接圆半径分别为 R_1，R_2.

由正弦定理得 $2R_1=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=2R_2$，

$\therefore R_1=R_2$，故两个外接圆大小相等.

14. (1) 利用三角形面积的海伦公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

其中 a，b，c 为三角形三边长，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 为三角形半周长.

下证海伦公式.

在 $\triangle ABC$ 中，设 a 与 b 的夹角为 θ，则由余弦定理得 $\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

从而 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}}$.

$$\begin{aligned}\therefore S&=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(c-a+b)}\\&=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$

现在用长为 2，3，4，5，6 的细木棒围成一个三角形，则 $p=\dfrac{2+3+4+5+6}{2}=10$.

故 $(p-a)(p-b)(p-c)$ 越大，则三角形面积越大. 列出所有能围成三角形的情形，可算得：

当三角形三边长分别为 2，9，9 时，所得三角形面积最小且为 $4\sqrt{5}$.

当三角形三边长分别为 6，7，7 时，所得三角形面积最大且为 $6\sqrt{10}$.

(2) 规律 1：当能拼成等边三角形时，所得等边三角形是所有能拼成的三角形中面积最大的.

规律 2：拼成的三角形面积不会超过 $\dfrac{\sqrt{3}p^2}{9}$，其中 $p=\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

1.7 平面向量的应用举例

练习（第 58 页）

1. 略

2. $F_A=5\sqrt{3}$ N，$F_B=5$ N.

3. 以帆船为原点，正北为 y 正半轴，正东为 x 正半轴建系.

风速 $\boldsymbol{v}_1=(10,\ 10\sqrt{3})$，水速 $\boldsymbol{v}_2=(20,\ 0)$，

$\therefore$ 帆船速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=(30,\ 10\sqrt{3})$，$|\boldsymbol{v}|=20\sqrt{3}$ km/h.

方向 $\tan\theta=\dfrac{10\sqrt{3}}{30}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\theta=60^\circ$，即北偏东 60° 方向.

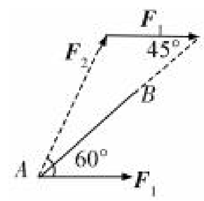
习题 1.7（第 58 页）

1. 以 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$ 为基向量，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CB}|^2-\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CA}|^2=0$.

故 $AD\perp CE$.



2. $BC=1\ 000\sqrt{3}$ km，方向为南偏西 30°

3. (1) $|\boldsymbol{F}_1|=2$，令 $|\boldsymbol{F}_2|=t(t>0)$，

则 $2+\frac{1}{2}t=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，得 $t=2(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore \boldsymbol{F}_2=(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+3)$.

(2) $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(\sqrt{3}+3,\ \sqrt{3}+3)$，

则 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力对质点所做的功

$W=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\overrightarrow{AB}$

$=(\sqrt{3}+3,\ \sqrt{3}+3)\cdot(2,\ 2)$

$=(4\sqrt{3}+12)$J.

4. (1) 由平行四边形法则可得 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2) $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$.

D 为外心 $\Rightarrow|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|\Rightarrow AH\perp BC$.

5. (1) 当 $\theta=120°$ 时，$|\boldsymbol{v}_1|\cdot\cos 60°=5$ km/h $>|\boldsymbol{v}_2|$，$\therefore$ 游船航行到北岸时的位置在 A' 左侧.

(2) 当 $|\boldsymbol{v}_1||\cos\theta|=|\boldsymbol{v}_2|(\cos\theta<0)$，即 $\cos\theta=-\frac{2}{5}$ 时，游船能到达 A' 处.

向北方向速度大小 $v=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}=2\sqrt{21}$(km/h)，$t=\frac{d}{v}=\frac{\sqrt{21}}{42}$(h).

6. (1) $|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{G}|\tan\theta$，$|\boldsymbol{F}_2|$ 随 θ 增大而增大.

$|\boldsymbol{F}_1|=\frac{|\boldsymbol{G}|}{\cos\theta}$，$|\boldsymbol{F}_1|$ 随 θ 增大而增大$\left(\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(2) $|\boldsymbol{F}_1|\leqslant 2|\boldsymbol{G}|\Rightarrow\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}$，即 $0\leqslant\theta\leqslant 60°$.

复习题一（第 62 页）

1. B　2. C

3. $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

4. $k=-4$

5. $\overrightarrow{CE}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}$.

6. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d}=(10,\ 3)$.

7. (1) $k=-1$　(2) $k=-1\pm\sqrt{3}$

8. (1) $\sqrt{19}$　(2) $\sqrt{7}$

9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　10. 5

11. (1) $c=5\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{6}$　(2) $b=1$ 或 $b=2$

(3) $a=\sqrt{37}$　(4) $\angle A=120°$

12. 13 km/h 或 35 km/h

13. 摩擦力 $f=mg\sin\alpha$.

$W_{功}=f\cdot s\cdot\cos\alpha=mg\sin\alpha\cdot s\cdot\cos\alpha=mgs\sin\alpha\cos\alpha$.

14. (1) $\overrightarrow{OP}=m\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}=(3,3)\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(3+m,3+2m)$，

∴ P 点坐标为$(3+m,3+2m)$.

$3+2m=0$，即 $m=-\dfrac{3}{2}$ 时，P 在 x 轴上.

$3+m=0$，即 $m=-3$ 时，P 在 y 轴上.

$3+m>0$ 且 $3+2m<0$，即 $-3<m<-\dfrac{3}{2}$ 时，P 在第四象限.

(2)$m=0$ 时，四边形 $OABP$ 为平行四边形.

15. (1)1　(2)1

16. (1)$2\sqrt{10}$，$4\sqrt{2}$　(2)$t=-\dfrac{11}{5}$

17. (1) 略

(2) 由题意得$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\Rightarrow4k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

∵$0<\beta-\alpha<\pi$，∴$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

18. $|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_6}|^2=12r^2$(其中 r 为 ⊙O 半径)，为定值，理由同推广后.

推广：n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 ⊙O 的内接正 n 边形，P 是 ⊙O 上的任一点，下证 $S=|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_n}|^2$ 为定值.

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\neq\mathbf{0}$，则将各向量顺时针旋转$\dfrac{360^\circ}{n}$，$\overrightarrow{OP_1}$ 变为$\overrightarrow{OP_2}$，…，$\overrightarrow{OP_n}$ 变为$\overrightarrow{OP_1}$，但其和向量仍不变，因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}=\mathbf{0}$.

$$S=\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{PP_i}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OP_i}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{PO}|^2+\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{OP_i}|^2+2\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OP_i}$$
$$=2nr^2+2\,\overrightarrow{PO}\cdot\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}=2nr^2.$$

19. $\sqrt{3}$

20. (1)$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(2)$c=\dfrac{25}{3}$

21. ∵$\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{q}$，∴$a^2+b^2-c^2=4S$，

∴ $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4S}{2ab}$. 又 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，

∴$\cos C=\sin C$，∴$\angle C=45^\circ$.

22. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,1)\Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{2}$.

∵ $\dfrac{1}{|\overrightarrow{BA}|}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}$，∴ $\overrightarrow{BD}$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线，且四边形 $ABCD$ 为菱形.

∵ 对角线长 BD 为边长的$\sqrt{3}$ 倍，∴$\cos\angle BAD=\dfrac{1^2+1^2-(\sqrt{3})^2}{2\times1\times1}=-\dfrac{1}{2}$，

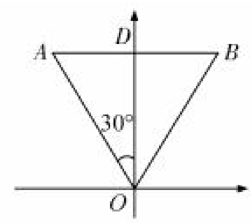
∴$\angle BAD=120^\circ$.

∴ 四边形 $ABCD$ 的面积是$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\sin120^\circ=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

23. (1) 航距最小，小艇应向正北航行.

轮船位移为 $20\times\sin 30°=10$(n mile)，$t=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$(h).

$v=\frac{20\times\cos 30°}{t}=30\sqrt{3}$(n mile/h).



(2) 要用时最短，则速度最大，即为 30 n mile/h.

由余弦定理得 $OB^2=AB^2+OA^2-2AB\cdot OA\cos A$，

即$(30t)^2=(30t)^2+20^2-2\times 30t\times 20\times\cos 60°$，

解得 $t=\frac{2}{3}$，此时 $\angle BOD=30°$. 故可设计航行方案如下：

小艇向北偏东 30° 以 30 n mile/h 前进可花最短时间.

24. 构造向量$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a_1b_1+a_2b_2=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta\leqslant|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$，

$\therefore(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2\leqslant|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2$，即$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$.

当且仅当 $\cos\theta=1$，即$\overrightarrow{OA}\ /\!/\ \overrightarrow{OB}$，即 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 时等号成立.

25. 取 O 为原点，则$\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$.

从而$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{1}{12}(3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2-4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$.

又由 $AB=AC$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{1}{12}(3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2)=0$，故 $OE\perp CD$.

第2章

三角恒等变换

三角莫愁公式多，

几何妙笔画婀娜.

展开和角星空转，

加减正弦明暗波.

Ⅰ. 全章整体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

本章是三角函数在继角与弧度、三角函数的概念和性质之后的进一步深化．本章学习的主要内容是两角和与差的正弦、余弦和正切公式，二倍角的正弦、余弦和正切公式，以及运用这些公式进行简单的恒等变换．

三角恒等变换位于三角函数与数学变换的结合点上，是分析和处理三角函数问题的基本工具．通过本章学习，学生在理解三角恒等变换的基本思想方法的过程中，要能体会三角恒等变换的工具性作用，发展数学推理论证能力和运算求解能力，提升数学核心素养．

2. 学习目标

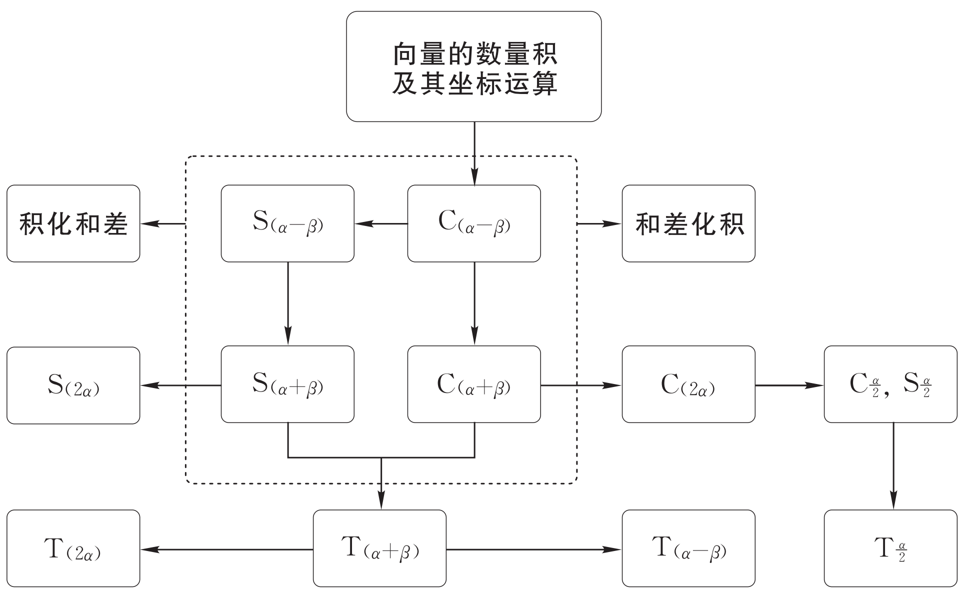
①经历推导两角差余弦公式的过程，知道两角差余弦公式的意义．

②能从两角差的余弦公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系．

③能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括推导出积化和差、和差化积、半角公式，这三组公式不要求记忆）．

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



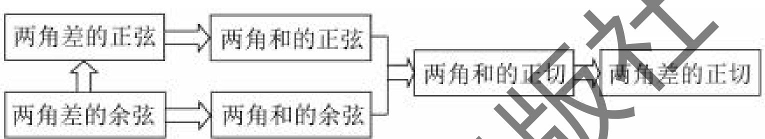
2. 对内容安排的说明

本章共分 3 节：2.1 两角和与差的三角函数；2.2 二倍角的三角函数；2.3 简单的三角恒等变换.

（1）三角恒等变换的学习是以代数变换与同角三角函数式的变换的学习为基础的. 和其他数学变换一样，它包括变换的对象、目标以及变换的依据、方法等要素. 本章变换的对象是由只含有一个角的三角函数式拓展为包含两个角的三角函数式，因此建立起一套包含两个角的和与差的余弦、正弦、正切的变换公式就是本章的首要任务，这就是 2.1 节的中心内容.

（2）由于和、差、倍之间存在的关系，两角和、两角差、倍角的三角函数之间必然具有紧密的内在联系，教学中不必独立地去一一推导这些公式，而只需推导出一个公式，以其为基础，通过逻辑推理得出其他公式.

由于学生在前一章已学习了平面向量及其应用，而向量工具为两角差的余弦公式的发现和证明提供了方便，因此选择两角差的余弦公式作为出发点，按如下的结构图展开教学，易于被学生接受. 这种逻辑结构体系，使得各公式的推导成为一个纯粹的代数化过程，大大地降低了思考的难度(尽管同时也失去了一些对学生进行思维训练的机会，这个可以通过鼓励学生自主探究得以弥补).



（3）两角和与差的正弦、余弦、正切公式中的“两角”是可以用不同形式的角代换的，这是本章要强化的数学思想，即转化与化归思想. 本章 2.2 节的二倍角的正弦、余弦、正切公式就是通过两角和的相应公式中两角取相同值时得到的.

（4）三角恒等变换是本章的教学重点，也是两角和与差的正弦、余弦、正切公式和二倍角的正弦、余弦、正切公式的应用. 本章 2.3 节中的半角公式、和差化积与积化和差等，就是具体的典型应用.

（5）本章内容安排的一条明线是建立两角和与差、二倍角的三角变换公式，还有一条暗线就是发展逻辑思维和数学运算的核心素养. 在安排本章内容时，特别注意安排了能引导学生正确地提出问题，并通过联系、对比、化归的观点去分析和处理问题的内容，以使他们能明确三角恒等变换不仅包括式子结构形式的变换，还包括式子中角的变换，以及不同三角函数之间的相互转化，从而强化学生运用数学思想方法进行变换的意识.

（6）本章内容遵循“坚决删除繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容”的安排原则，严格控制了三角恒等变换及其应用的繁、难程度.

三、课时安排建议

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1　两角和与差的三角函数	
2.1.1　两角和与差的余弦公式	1 课时
2.1.2　两角和与差的正弦公式	1 课时
2.1.3　两角和与差的正切公式	1 课时
2.2　二倍角的三角函数	2 课时
2.3　简单的三角恒等变换	3 课时
小结与复习	2 课时

Ⅱ. 教材内容分析与教学建议

2.1　两角和与差的三角函数

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

引导学生通过独立探索和讨论交流，导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，并了解它们的内在联系，运用它们进行简单的三角恒等变形.

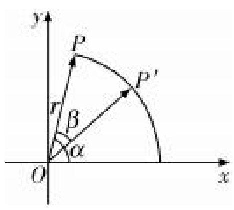
◆ **本节难点：**

两角差的余弦公式的探索与证明.

二、教材编写意图

两角差的余弦公式是本节所有公式的出发点. 教材首先探究得出两角差的余弦公式，再在此基础上通过代换得出两角和与差的其他公式. 因此，两角差的余弦公式的探索与证明既是教学的重点，也是难点.

为突出重点并化解难点，教材首先给出了如图所示的直观图形，其中 Ox 为 x 轴的非负半轴，$\angle xOP=\alpha$，$|OP|=r$，则通过点 P 与 P' 的坐标 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$，$P'(r\cos(\alpha-\beta), r\sin(\alpha-\beta))$ 将角 α，β，$\alpha-\beta$ 联系起来. 这样做的目的在于为推导两角差的余弦公式提供“先行组织者”，并自然地提出“怎样由角 α，β 的三角函数值求角 $\alpha-\beta$ 的三角函数值 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$”的问题.



向量兼有形的直观性和运算的简捷性，是数学探究发现的有力工具. 承上启下，教材运用向量方法推导出了两角差的余弦公式. 这样既回避了通常运用单位圆上的三角函数线进行探索存在的困难，又让学生体验到了向量方法的妙处.

代换是数学推理论证和运算求解中十分重要的过程. 两角差的余弦公式中 α，β 的任意性，为通过代换得出其他公式创造了条件. 教材中用 $-\beta$ 代替 β，由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 得出了两角和的余弦公式，再用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替两角和的余弦公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 中的 α，得到了两角差的正弦公式. 包括二倍角的正弦、余弦、正切公式等其他许多公式都是这样类似“生成”的. 这种处理方式，既体现了数学思想方法的统一性，又表明了不同公式之间的相互联系.

三、教学建议

本节的教学重点和难点是两角差的余弦公式的推导，教学中要引导学生主动参与，独立探索，从而深化理解和掌握各公式的来龙去脉，并能运用公式进行恒等变形或化简求值.

直观想象是高中数学核心素养的一个重要方面，学生常凭直觉得出 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ 等错误判断，教学中可通过举例让学生认识到错误所在，并由教材 P.67 图 2.1－1感悟到运用向量方法推导两角差的余弦公式的可能性，再进入 2.1.1 小节的教学过程.

两角和的各公式的推导也是发展学生逻辑推理和数学运算的核心素养的重要过程. 教学中，除自然地由两角差的余弦公式得到其他的公式外，还要引导学生自主探究，尝试从多个角度去探索公式的获得方法和运用公式作等价变形的思路.

如用$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替两角差的余弦公式中的α，可得

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,$$

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

其他公式都可类似处理. 这样做，不但能加深学生对公式的理解和掌握，更有利于学生融会贯通各公式的相互联系，形成完整的数学知识结构体系.

观察与联想是数学思考探索中不可或缺的过程，化归与转化是重要的数学思想. 教学中要引导学生认真观察各三角函数、不同角度的关系特征，以便为推导公式或应用公式做铺垫. 如正弦函数或余弦函数常用 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 进行转化（不只这些，其他同理）. 在公式的应用中，形如$(\alpha+x)-(\beta+x)=\alpha-\beta$，$(\alpha+x)+(\beta-x)=\alpha+\beta$ 等角度关系，常常是转化与化归的思维生长点.

2.1.1 两角和与差的余弦公式

两角差的余弦公式既是本小节的重点，也是本小节的难点. 两角和的余弦公式是两角差的余弦公式的一个直接应用，当然它本身也是一个重要的公式.

1. 两角和与差的余弦的引入

教材首先提出问题：怎样由角α，β的三角函数值求角$\alpha-\beta$的三角函数值$\cos(\alpha-\beta)$和$\sin(\alpha-\beta)$？教学中要引导学生循着这一思路开展探索活动.

凭直觉得出$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$是常出现的错误，教学时要通过具体的例子说明它不是对任意角α，β都成立（当然它也不是对任意角α，β都不成立），从而进一步明确“恒等式”的含义. 这样可加深对恒等式的概念的认识，也为以此公式为基础推导其他公式做准备.

2. 两角差余弦公式的推导

联系已经学过的知识（包括三角函数知识）探索两角差的余弦公式是很自然的. 教学中可引导学生发现诸如在单位圆中构造全等三角形，利用坐标法探索两角差的余弦公式的思路，但同时又要说明这些方法存在的问题. 在引导学生用向量的数量积探索两角差的余弦公式时，下面三点值得注意：

（1）在回顾根据教材 P.67 图 2.1－1 得到$\cos(\alpha-\beta)$的可能途径中，引导学生和已学过的向量的数

量积建立联系，从而发现向量法解决问题的可能性和可行性.

（2）结合有关图形，完成运用向量法推导公式的必要准备.

（3）探索过程不求一步到位，即先不理会其中的细节，抓住主要问题及问题解决的基本线索进行探究，然后再做反思，予以完善. 如先讨论当 $\alpha-\beta\in[0,\pi]$ 的情形，再将 α，β 为任意角的情形化归为这种情形. 这也是处理一般探索性问题应遵循的原则.

3. 探索两角和的余弦公式

利用已有的数学活动经验，这是解决数学问题的基本原则. 教学中可通过诸如“这个内容和以前学过的哪些内容具有相关性”“能利用其结论或方法解决当前的问题吗”的设问，引导学生自然地运用两角差的余弦公式推导两角和的余弦公式.

如何由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 得到关于 $\cos(\alpha+\beta)$ 的公式呢？注意到公式为恒等式，即公式中的 α，β 可以是任意的字母或代数式，一个很自然的想法是用 $-\beta$ 代替公式中的 β，得到

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta).$$

这样就得到了欲探索的公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. 当然还可指出推导公式时的代换方法是不唯一的，如用 $\pi-\alpha$ 替换公式中的 α，得

$$\cos[(\pi-\alpha)-\beta]=\cos(\pi-\alpha)\cos\beta+\sin(\pi-\alpha)\sin\beta.$$

化简后同样得到了两角和的余弦公式.

4. 辨析两角和与差的余弦公式

观察两角和的余弦公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{(\alpha+\beta)})$$

与两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{(\alpha-\beta)}),$$

可发现两者的结构十分相似. 这种相似性为理解和掌握公式提供了方便，也为混淆两公式制造了可能. 教学中要通过对两个公式的辨析，掌握它们在结构上的一致性和符号的差异性，以便能准确运用公式. 可引导学生这样记忆这两个公式：“公式右端为 α，β 的同名三角函数积的和(差)，左端为两角差(和)的余弦.”

5. 例题的教学分析

例 1　本题是公式的直接运用. 在没有特别说明时，求三角函数的值都要化归为特殊角的三角函数值，要让学生形成这一共识.

对于 $\cos 75°$，可化归为 $\cos(45°+30°)$ 或 $\cos(30°+45°)$，再用两角和的余弦公式展开计算. 对于 $\cos 15°$，可化归为 $\cos(45°-30°)$ 或 $\cos(60°-45°)$，再用两角差的余弦公式展开计算. 本例的目的就是熟悉两角和与差的余弦公式的具体运用.

例 2　本题是公式的逆向运用.

（1）完全契合两角和的余弦公式的“右边”，逆用公式即得结果.

（2）并不完全契合两角和或差的余弦公式，但由诱导公式得 $\sin 5°=\cos 85°$ 后就和两角差的余弦公式的“右边”契合了. 教学中(2)小题的处理方法不可直接告知学生，而应创设铺垫让学生自主发现，如先将(1)小题改为“求 $\cos 20°\cos 40°+\cos 70°\sin 40°$”，引导学生发现思路后，求解(2)小题的铺垫就有了.

例 3　此例也属于公式的直接运用，只是和例 1 相比，多了运用同角三角函数关系求三角函数值的过程.

题目明确了“角 α，β 分别位于第二、四象限”，因此由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$ 可分别求出 $\cos\alpha$，$\sin\beta$ 的确定值. 教学中要通过“待求”和“已知条件”的比较，让学生自主发现先求出 $\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的必要性，再进行求解.

如果没有“角 α，β 分别位于第二、四象限”的条件，问题的解决需要分情况讨论，教学时可由此例做变化引导学生作进一步的探究.

例如，将例题变为“已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，试讨论 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值”，则可知角 α 位于第一、二象限，角 β 位于第一、四象限，接下来分情况讨论就可得出答案. 事实上，

当 α，β 位于第一象限时，由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，从而

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{33}{65},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{63}{65}.$$

当 α 位于第一象限，β 位于第四象限时，由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=-\frac{12}{13}$，从而

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{63}{65},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{33}{65}.$$

类似地，当 α 位于第二象限，β 位于第一象限时，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{63}{65},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}.$$

当 α 位于第二象限，β 位于第四象限时，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{33}{65},\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{63}{65}.$$

这里的分类讨论，有利于加深学生对公式的理解和掌握，培养思维的严谨性.

★补充例题

例 1 不查三角函数表，试求 $\sin 7^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\cos 67^\circ$ 的值.

解： $\sin 7^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\cos 67^\circ=\cos 83^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\sin 23^\circ=\cos(83^\circ-23^\circ)=\frac{1}{2}$.

说明： 本题为两角差的余弦公式的逆用. 解题中，为了凑成两角差的余弦公式的结构，需要运用诱导公式对三角函数名作必要的转化.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，试求 $\cos C$ 的值.

解： 因为 $0<\cos B=\frac{5}{13}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\sin B=\frac{12}{13}$.

又因为 $0<\sin A=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $A\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$.

若 $A\in\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$，因为 $B\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$，则 $A+B\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$，与 $A+B+C=\pi$ 矛盾，

因此 $A\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$，从而 $\cos A=\frac{4}{5}$. 于是，

$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$.

说明：本题为两角和与差的三角函数公式的应用. 在应用中，已知一个角的正弦（或余弦）值求角的余弦（或正弦）值，在确定符号时，涉及角的范围的讨论. 如果不讨论角的范围，所得结果可能不准确. 如解答本题时容易出现下面的错误：

因为 $\sin A=\frac{3}{5}$，且 $0<A<\pi$，所以 $\cos A=\pm\frac{4}{5}$.

因为 $\cos B=\frac{5}{13}$，且 $0<B<\pi$，所以 $\sin B=\frac{12}{13}$.

又 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$，从而 $\cos C=\frac{16}{65}$或$\frac{56}{65}$.

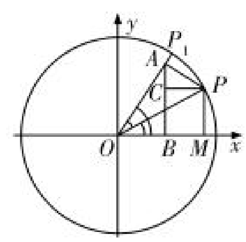
错误的原因就是忽视了角的范围的讨论.

6. 相关链接

两角和与差的余弦公式的推导方法

两角和与差的余弦公式是三角变换公式的基础，公式的推导得到了广大教师的高度重视. 不同版本的教材所采用的方法可能不同，本版教材是运用平面向量的数量积运算推导的. 作为知识面的拓展，下面介绍另外两种推导方法，对于引导学生从不同的视角发现问题、提出问题、分析问题和解决问题，具有一定的价值.

1. 运用三角函数线证明两角差的余弦公式



如右图，$\angle P_1Ox=\alpha$，设角 α 的终边与单位圆的交点为 P_1，$\angle POP_1=\beta$，则$\angle POx=\alpha-\beta$. 过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，那么 OM 即为 $\alpha-\beta$ 的余弦线. 这里要用 α，β 的正弦、余弦的线段来表示 OM.

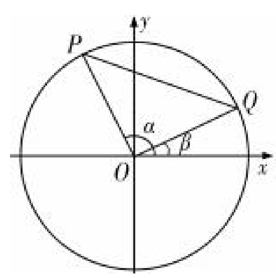
过点 P 作 $PA\perp OP_1$，垂足为 A，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B. 再过点 P 作 $PC\perp AB$，垂足为 C，则

$\cos\beta=OA$，$\sin\beta=AP$，并且$\angle PAC=\angle P_1Ox=\alpha$，于是

$OM=OB+BM=OB+CP=OA\cos\alpha+AP\sin\alpha=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$.

综上所述，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

2. 应用余弦定理证明两角和的余弦公式



如右图，设 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$，则

$|PQ|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$.

在$\triangle OPQ$ 中，$\because |PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2-2|OP|\,|OQ|\cos\angle POQ$，

$\therefore |PQ|^2=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$，

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

2.1.2 两角和与差的正弦公式

本小节主要是利用两角差的余弦公式推导出两角和与差的正弦公式. 教学重点是理解并掌握两角和与差的正弦公式，并通过公式的推导进一步认识三角恒等式的意义及代换法的作用.

1. 两角和与差的正弦公式的推导

拓展已有的知识结构形成新的知识体系，这是学习的一般规律. 由于上一节学习了两角和与差的余弦公式，如何在这个基础上发现、理解和掌握两角和与差的正弦公式，这是十分自然的想法. 如何得出关于 $\sin(\alpha-\beta)$ 的公式呢？由诱导公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 就可将正弦函数化归为余弦函数. 教材遵循的就是这个思路：

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

这就得到了两角差的正弦公式，即

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha-\beta)})$$

用 $-\beta$ 代替其中的 β 就得到两角和的正弦公式了，即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{(\alpha+\beta)})$$

2. 变换思想与恒等式的再认识

两角和与差的余弦、正弦公式是三角恒等式，公式中的角可以用关于角的任何代数式代换，教材中实际上是用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替两角和的余弦公式中的 α 得到两角差的正弦公式，再用 $-\beta$ 代替两角差的正弦公式中的 β 得到两角和的正弦公式.

教学中还可引导学生从其他角度实现公式的相互转化，如用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替两角差的余弦公式中的 α，可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

再用 $-\beta$ 代替其中的 β 就得到两角差的正弦公式了. 当然还有其他方式，要鼓励学生细心观察发现，从而对公式的理解和掌握形成一个立体化的结构体系.

3. 辨析两角和与差的正弦公式

同样地，两角和的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{(\alpha+\beta)})$$

与两角差的正弦公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{(\alpha-\beta)})$$

在结构上的相似性为理解和掌握公式提供了方便，也为混淆两公式制造了可能. 教学中要通过对两个公式的辨析，掌握它们在结构上的一致性和符号的差异性，以便能准确运用公式. 两角和与差的正弦公式可以记忆为“正余余正，符号相同”，其中“正余余正”表示展开后的两项分别为两角的“正弦乘余弦”与“余弦乘正弦”；“符号相同”指的是“展开后两项之间的连接符号”与“展开前两角之间的连接符号”相同. 这种结构特征与两角和与差的余弦公式是有差异的，而且这种差异有利于记忆两角和与差的正弦公式.

4. 例题的教学分析

例 4　本题属于两角和与差的正弦公式的直接运用．此例和例 1 结构相同，例 1 的教学设计可为此例提供借鉴，教学中也要引导学生在比较中发现问题、提出问题、分析问题和解决问题．

例 5　和例 2 一样，本题是公式的逆向运用．此例和例 2 结构相同，教学策略可参考例 2 的策略．

例 6　此例也属于公式的直接运用．此例和例 3 结构相同，教学策略可参考例 3 的策略．

★补充例题

例 1　填空：

(1) $\sin 105°+\sin 165°=$________．

(2) $\sin(54°-x)\cos(36°+x)+\cos(54°-x)\sin(36°+x)=$________．

解：(1) 因为 $\sin 105°=\sin(45°+60°)=\sin 45°\cos 60°+\cos 45°\sin 60°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin 165°=\sin(180°-165°)=\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

所以 $\sin 105°+\sin 165°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故填 $\frac{\sqrt{6}}{2}$．

(2) 原式 $=\sin[(54°-x)+(36°+x)]=\sin 90°=1$，故填 1．

例 2　已知 $\sin\alpha-\cos\beta=-\frac{1}{3}$，$\cos\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}$，试求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值．

解：将 $\sin\alpha-\cos\beta=-\frac{1}{3}$ 两边平方，得 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{9}$．　①

将 $\cos\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}$ 两边平方，得 $\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$．　②

由①+②，得 $1+1-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}$，

即 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{59}{72}$，故 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{59}{72}$．

5. 相关链接

傅立叶级数与三角变换

傅立叶(1768—1830)，法国数学家、物理学家．傅立叶的主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论．他在论文《热的传播》中推导出了著名的热传导方程，并在求解方程时发现解析函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以化为三角函数的无穷级数．傅立叶级数(即三角级数)、傅立叶分析等理论均由此创始．

在自然界和工程技术中，常遇到各种周期性的运动过程，这类周期性运动中的有关量在经过一定时间 T 以后，数值仍不变．描述这类周期现象的函数叫作周期函数，它是时间 t 的函数，即 $f(T+t)=f(t)$，其中 T 叫作函数的周期．如弹簧的振动可用函数表示为

$$s(t)=A\sin(\omega t+\varphi).\quad ①$$

又如电子学中的矩形电脉冲随时间 t 的变化规律为

$$u(t)=\begin{cases}E, & nT<t<nT+t_0,\\0, & nT+t_0<t<(n+1)T,\end{cases} \tag{②}$$

这些都是周期函数. 其中①表示的函数叫作正弦型函数，②表示的函数叫作非正弦型函数. 在研究周期函数时，往往需要将非正弦型函数用一系列三角函数的和来表示，以便利用三角函数的某些性质.

简单的周期运动，如单摆振动、音叉振动等可用正弦型函数

$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

来表示，并称为简谐振动，其中 $|A|$ 称为振幅，ω 称为角频率，φ 称为初相. 简谐振动的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

假设非正弦型函数可以在某种条件下转化为一系列正弦型函数的和，即

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n),$$

其中 A_0，A_n，φ_n 都是常数.

为了便于讨论，将正弦型函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 按三角公式展开，得

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t,$$

并且令 $\dfrac{a_0}{2}=A_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$x=\omega t$，则 $f(t)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 的右端就可写为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{③}$$

一般地，形如③的式子称为傅立叶级数，其中 a_0，a_n，b_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 都是常数. 将一个非正弦型函数转化为傅立叶级数，称为傅立叶变换. 傅立叶级数是高等数学中的重要内容，它和三角变换的关系十分密切，在数学研究中具有重要的地位.

2.1.3 两角和与差的正切公式

具备了两角和与差的余弦、正弦公式的知识基础和探究过程体验，再学习本节内容不会有太大的难度，但有几个值得注意的事项.

1. 加强对一般性规律的认识

两角和与差的余弦、正弦公式的探究过程是探究两角和与差的正切公式的基本活动经验，因此利用诱导公式将正切化归为正弦、余弦的比

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

是很自然的想法，而且这是三角变换的一般性规律. 依据要求，在将结果用 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 表示的过程中，许多同学不太容易想到分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$，教学中要引导学生观察分子、分母所具有的“齐次”式的结构特征，并理解这种“通性通法”的价值.

2. 注意推理论证过程的严谨性

两角和的正切公式的推导中，经历了分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 的过程，因此必须考虑 $\cos\alpha\cos\beta\neq$

0，即 $\cos\alpha\neq0$ 且 $\cos\beta\neq0$，即 α，$\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，这也是 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 有意义的条件. 学生极容易忽视这个条件，教学中要特别指出，以强调推理论证过程的严谨性. 教材中特别指出了：

当 α，β，$\alpha\pm\beta$ 均不取 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，我们得到如下两角和与差的正切公式：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\qquad (\mathrm{T}_{(\alpha+\beta)})$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\qquad (\mathrm{T}_{(\alpha-\beta)})$$

这里 $\alpha\pm\beta$ 均不取 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 是分别对 $\mathrm{T}_{(\alpha+\beta)}$ 和 $\mathrm{T}_{(\alpha-\beta)}$ 的要求，不是两个公式的统一要求. 事实上，要求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的展开式就已经肯定了 $\tan(\alpha+\beta)$ 有意义，即 $\alpha+\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 同样地，要求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的展开式就已经肯定了 $\tan(\alpha-\beta)$ 有意义，即 $\alpha-\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

3. 例题的教学分析

例 7　本题为两角和与差的正切公式的直接运用. 教学中除引导学生理解并掌握两角和与差的正切公式外，还有两点值得注意：一是过程中所得到的结论 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$，$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ 具有较好的结构形式，应引导学生鉴赏；二是教材中结合图 2.1-4 提出了思考题：对于任意角 α，只要 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 有意义，是否一定有 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-1$? 教学中要引导学生探究，认识到问题的本质为 $\tan\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1$.

例 8　相互联系是数学思维灵活性的表现. 联系地看问题，本例的方法二正是例 7 所得到的结论 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ 的逆向运用，即 $\alpha=15°$ 时从右边向左边导出结论. 问题的解决中，常用特殊的三角函数(式)（如 $\tan\frac{\pi}{4}$，$\sin\frac{\pi}{2}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 等）代换"1"，以便运用三角函数公式进行化归与转化，教学中要引导学生赏析这种技巧.

例 9　本例是三角函数的一道应用题. 阅读理解题意，包括所涉及概念的含义(如本题中的"视角")是解决问题的首要步骤，之后再将问题数学化，转化为：

如图（见教材，此处略），在 Rt$\triangle AOC$ 中，已知 $OB=67$ m，$OC=87$ m，$AO=100$ m，$\angle CAO=\alpha$，$\angle BAO=\beta$，求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

本例题的解答不难，数学化的过程也不复杂，但教学中有必要让学生充分体会求解这类问题的一般思路方法，发展数学的应用意识.

★补充例题

例 1　填空：

(1) 设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个实数根，则 $\tan(\alpha+\beta)=$________.

(2) $\tan23°+\tan37°+\sqrt{3}\tan23°\tan37°=$________.

解：(1) 由条件得，$\tan\alpha+\tan\beta=3$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{1-2}=-3$.

故填-3.

（2）因为$\sqrt{3}=\tan 60^\circ=\tan(23^\circ+37^\circ)=\dfrac{\tan 23^\circ+\tan 37^\circ}{1-\tan 23^\circ\tan 37^\circ}$,

即 $\tan 23^\circ+\tan 37^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ$,

所以 $\tan 23^\circ+\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ=\sqrt{3}$.

故填$\sqrt{3}$.

说明：此例中问题解决的关键是整体处理技巧的运用.（1）中不是单独求 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$，而是将 $\tan\alpha+\tan\beta$ 和 $\tan\alpha\tan\beta$ 整体考虑；（2）中式子的值，也是通过$\sqrt{3}=\dfrac{\tan 23^\circ+\tan 37^\circ}{1-\tan 23^\circ\tan 37^\circ}$整体变化而得到的.

例 2 试求$\dfrac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$的值.

解：原式$=\dfrac{\sin(15^\circ-8^\circ)+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$

$=\dfrac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ}=\tan 15^\circ$

$=\tan(45^\circ-30^\circ)$

$=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=2-\sqrt{3}$.

说明：此题综合运用了两角和与差的余弦、正弦、正切公式，对数学的化归与转化能力有着较高的要求.

4. 相关链接

测量模型中的三角变换

三角变换在分析和解决工程测量问题中发挥着重要的作用，是不可或缺的工具. 由下面两个问题及其解决可见一斑.

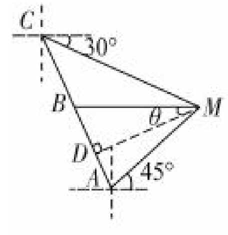
问题 1. 已知 A，B，C 是一条河岸上的三点且在一条直线上，$AB=BC=1$ km，从三点分别遥望灯塔 M，在 A 处望见灯塔在东北方向，在 B 处见灯塔在正东方向，在 C 处见灯塔在南偏东 60°方向，试求灯塔与岸的最短距离.

问题 2. 海中有一小岛 B，周围 3.8 n mile 内有暗礁. 一军舰从 A 地出发由西向东航行，望见小岛 B 在北偏东 75°方向，航行 8 n mile 到达 C 处，望见小岛在北偏东 60°方向. 若此舰不改变航行方向继续前进，试问有没有触礁的风险？

上述两个问题模型都是测量模型. 根据题意构造三角形，通过三角变换以及相关的数学知识，建立模型，再解答模型，是处理这类问题的基本方法.

问题 1 的解：如图，设灯塔 M 到岸的最短距离 $MD=x$ km，$\angle BMD=\theta$，则

$\angle CMD=30^\circ+\theta$，$\angle AMD=45^\circ-\theta$，



$AB=BD+DA=x\tan\theta+x\tan(45°-\theta)$(km)，

$BC=CD-BD=x\tan(30°+\theta)-x\tan\theta$(km).

因为 $AB=BC=1$ km，所以

$$x\tan\theta+x\tan(45°-\theta)=x\tan(30°+\theta)-x\tan\theta=1.$$

由此得

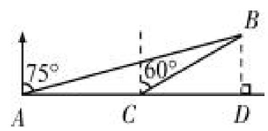
$$x=\frac{1}{\tan\theta+\tan(45°-\theta)}=\frac{1}{\tan(30°+\theta)-\tan\theta}.$$

由此可求得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，

所以 $x=\dfrac{1+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{7+5\sqrt{3}}{13}$.

所以，灯塔与岸的最短距离是 $\dfrac{7+5\sqrt{3}}{13}$ km.

问题 2 的解：只需计算此航线与小岛 B 之间的最短距离.



如图，$AC=8$ n mile，$\angle ABD=75°$，$\angle CBD=60°$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AD=BD\cdot\tan\angle ABD=BD\cdot\tan 75°$.

在 Rt$\triangle CBD$ 中，$CD=BD\cdot\tan\angle CBD=BD\cdot\tan 60°$.

所以，$AD-CD=BD(\tan 75°-\tan 60°)=AC=8$ n mile.

解得 $BD=\dfrac{8}{\tan 75°-\tan 60°}=\dfrac{8}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}}=4$(n mile)$>3.8$ n mile.

所以军舰没有触礁的风险.

2.2 二倍角的三角函数

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

引导学生在已学习过的两角和的正弦、余弦、正切公式的基础上，通过代换得出二倍角的正弦、余弦和正切公式，并能将其熟练地用于进行简单的三角变换.

◆ **本节难点：**

灵活运用二倍角的正弦、余弦和正切公式进行三角变换.

二、教材编写意图

本节延续了上一节数学探究的思路方法，即分别在两角和的正弦 $S_{(\alpha\pm\beta)}$，两角和的余弦 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，两角和的正切 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 公式的基础上，通过令 $\beta=\alpha$ 的代换得到二倍角的正弦 $S_{(2\alpha)}$，二倍角的余弦 $C_{(2\alpha)}$，二倍角的正切 $T_{(2\alpha)}$ 公式，并运用公式进行简单的三角变换.

代换法是数学的化归与转化思想的具体运用. 本节得出 $S_{(2\alpha)}$，$C_{(2\alpha)}$，$T_{(2\alpha)}$ 的方法就是代换法. 教学中，要通过公式的推导过程，进一步加深对两角和与差的正弦、余弦、正切公式的掌握和运用，进一步领会化归与转化思想的应用的广泛性.

三、教学建议

1. 二倍角公式的引入

教师首先要复习两角和与差的正弦、余弦、正切公式，并指出公式中的“角”可以是一切使公式有意义的字母或代数式，再引导学生观察发现两角和的正弦、余弦、正切公式中，如果“两角”相同则公式具有新的特点，在解决关于倍角的三角变换问题中有特别的作用，于是自然地提出令 $\beta=\alpha$，从而得到二倍角的正弦、余弦、正切公式的思路.

2. 二倍角公式的推导

令 $\beta=\alpha$，代换得到二倍角的正弦、余弦、正切公式，即

$$S_{(2\alpha)}:\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$C_{(2\alpha)}:\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$T_{(2\alpha)}:\ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

3. 二倍角的余弦公式

二倍角的余弦公式($\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$)有三种形式，它们各自有着独特结构和应用情境.

公式 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，右边两项次数相同，但包含正弦、余弦两种函数；公式$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-$

1 只含有余弦；公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 只含有正弦．在具体运用中，三种形式要依据问题的特点而灵活选用．特别地，公式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 与 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，左边的次数为 1，右边的次数为 2，因此从左边到右边属于"升幂"，从右边至左边则是"降幂"．因而公式常写为

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

上述两公式称为降幂公式，做降幂运算时常常用到．

4. 例题的教学分析

例 1　直接运用二倍角公式求三角函数值，目的在于让学生初步体验二倍角公式的运用过程．

在教学过程中，运用公式 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 求 $\cos\alpha$ 时，要搞清楚"±"的取法．在求 $\tan 2\alpha$ 时，还可以运用 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 进行．这个做法虽然不是最简单的，但对熟悉二倍角的正切公式有帮助．

例 2　教材中例 1 的解答没有给出二倍角正切公式的运用，故特设置了本题．(1)为公式的直接运用，(2)为公式与(1)的结论的综合运用，(3)为两角差的正切公式与二倍角的正切公式的综合运用．

例 3　此例为运用二倍角的余弦公式证明恒等式．教材给出的方法是运用 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 升幂，将左边化为右边．证明三角恒等式的一般思路是从等式较复杂的一边向较简单的一边转化，或等式的两边向某个"中间量"转化．教材所采用的证法正是基于这个考虑．

作为思路方法，还可以直接由降幂公式 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，从右边到左边进行推证．

事实上，由 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 及 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，可得 $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}$．这个过程也是简单明了的．

以上三个例题为本节第 1 课时的教学安排．下面的例题带有一定的综合性，是本节第 2 课时的教学安排．

例 4　本题综合了二倍角的正切公式与诱导公式、两角差的正切公式，对综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力有一定的要求．

例 5　本题为降幂公式 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 的运用，属于公式的"变形用"．当然，本题的解答中还用到了两角和与差的余弦公式，有较强的综合性．

值得注意的是，在三角函数式的化简与求值中，涉及正弦或余弦的"平方"，常通过降幂公式将二次式化为一次式．这也是一个基本的思维方向．

例 6　本题为运用二倍角公式解决实际应用题，是数学建模思想的运用．问题形式为证明题，但实质上就是要求得矩形面积的最大值为 $2R^2$．

为此，引入角参数 α，将矩形的面积表示成参数 α 的正弦函数 $S=2R^2\sin 2\alpha$，这个过程就是数学建模，函数 $S=2R^2\sin 2\alpha$ 就是一个数学模型．建模过程中用到了二倍角的正弦公式．

高中数学课程标准要求数学探究和数学建模渗透于一切内容的教学过程之中，因而在此例的教学过程中要强化数学建模核心素养的达成．

★补充例题

例 1 求函数 $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$ 的最小正周期.

分析： 本题既可以根据乘法公式展开化简，也可以先对每一个括号内的式子化简后再计算，最终都能得到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的式子，然后再求函数的最小正周期.

解： （方法一）由题意，得

$$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=3\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cos x$$

$$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

所以，该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（方法二）由题意，得

$$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$$

$$=\left[2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

所以，该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

说明： 本题为综合运用两角差的余弦公式、二倍角公式化简三角函数式，而且是逆用公式. 两种方法的本质是一样的.

例 2 求函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$ 的最大值和最小值.

解： 将函数 $f(x)$ 的表达式化简，得

$$f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2=3\cos^2 x+1=\frac{3}{2}(2\cos^2 x-1)+\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}.$$

当 $2x=2k\pi$，即 $x=k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$.

当 $2x=2k\pi+\pi$，即 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(k\in\mathbf{N})$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$.

说明： 本题解答的关键步骤是逆用倍角公式，将 $f(x)$ 的表达式化简为 $f(x)=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}$.

5. 相关链接

三角变换中的数学思想方法

三角恒等变换中蕴藏着丰富的数学思想方法，下面简要枚举几类.

1. 函数与方程思想

函数思想是指利用函数的概念与性质去分析问题、转化问题和解决问题的方法. 方程思想则是通过列方程或方程组求解相关量的思想方法. 函数与方程思想是中学数学的基本思想，在三角函数问题中，也时常用到函数与方程思想.

例 1. 已知 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{10}{3}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值；

(2)求$\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$的值.

分析：(1)结合α的范围求$\tan\alpha$的值.(2)中分母实质是关于α的余弦，考虑将分子也化归为关于α的正弦或余弦．这种“统一量法”的背景就是函数与方程的数学思想.

对于(1)，由条件得$3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3=0$，解得$\tan\alpha=-3$或$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

注意到$\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，可知$\tan\alpha>-1$，所以$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

对于(2)，$\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{4\sin\alpha+3\cos\alpha}{-\sqrt{2}\cos\alpha}=\dfrac{4\tan\alpha+3}{-\sqrt{2}}=-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

2. 数形结合思想

在解决三角函数问题时，三角函数的图象是不可缺少的工具．大多数题目的解决都可画出三角函数的图象，结合图象确定三角函数值的范围或变化规律.

例 2. 若方程$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$在$[0,\ 2\pi]$上恰有两个不同的实数根，试求实数a的取值范围.

分析：方程$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$在$[0,\ 2\pi]$上恰有两个不同的实数根，等价于直线$y=a$和函数$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$在$[0,\ 2\pi]$上恰有两个不同的交点.

作出函数的图象，观察图象可知$-2<a<1$或$1<a<2$，即实数a的取值范围为$(-2,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

3. 转化与化归思想

转化与化归思想是三角函数最基本的思想．所有的三角变换都是转化与化归．例如在求三角函数$f(x)=a\sin x+b\cos x\ (ab\neq0)$的最值时，就要将函数化归为单一角的形式$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ $\left(其中\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$．在求形如$f(x)=a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x$的值域时，通常设$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，从而$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，从而$f(x)=g(t)=at+b\cdot\dfrac{t^2-1}{2}$，这样原问题就化归为二次函数在闭区间上的最值问题了．这个过程也属于转化与化归的思想方法.

例 3. 若$f(x)=\cos 2x-2a\cos x+a^2-2a\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$的最小值为$-2$，试求实数$a$的值，并求此时$f(x)$的最大值.

分析：利用二倍角公式将$f(x)$化归为关于$\cos x$的二次函数，配方后求最值．解题中要注意变量$\cos x$的取值范围，对参数a进行分类讨论.

事实上，$f(x)=2\cos^2 x-2a\cos x+a^2-2a-1=2\left(\cos x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{2}-2a-1$.

由$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，知$0\leqslant\cos x\leqslant1$，所以

当$0\leqslant a\leqslant2$时，$[f(x)]_{\min}=\dfrac{1}{2}a^2-2a-1=-2$，解得$a=2-\sqrt{2}$，此时$[f(x)]_{\max}=-1$.

当$a>2$时，$[f(x)]_{\min}=a^2-4a+1=-2$，解得$a=3$，此时$[f(x)]_{\max}=2$.

当$a<0$时，$[f(x)]_{\min}=a^2-2a-1=-2$，解得$a=1$，不合要求.

综上可知，$a=2-\sqrt{2}$ 或 $a=3$.

当 $a=2-\sqrt{2}$ 时，$[f(x)]_{\max}=-1$；当 $a=3$ 时，$[f(x)]_{\max}=2$.

4. 分类与整合思想

分类与整合是运用最为普遍的数学思想. 在三角运算中，有关三角函数所在象限符号的选取常需要分类讨论. 例 3 所示的三角函数与二次函数综合的最值问题，也常需分类讨论.

例 4. 已知 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\beta<\frac{\pi}{4}$，$3\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，试求 $y=\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$ 的最小值.

分析：结合条件消去 β，将其转化为关于 $\sin\alpha$ 的二次函数，再求其最小值.

事实上，因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\beta<\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\beta<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0\leqslant\sin^2\beta<\frac{1}{2}$.

故 $0\leqslant 2\sin^2\beta<1$.

又 $2\sin^2\beta=3\sin^2\alpha-2\sin\alpha<1$，所以 $\frac{2}{3}\leqslant\sin\alpha<1$ 或 $-\frac{1}{3}<\sin\alpha\leqslant 0$.

又 $y=\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{3}{2}\sin^2\alpha-\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

所以当 $\sin\alpha\in\left[\frac{2}{3},\ 1\right)$ 时，y 是增函数，当 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 时，$y_{\min}=-\frac{2}{9}$；当 $\sin\alpha\in\left(-\frac{1}{3},\ 0\right]$，$y$ 是减函数，所以当 $\sin\alpha=0$ 时，$y_{\min}=0$.

综上可知，$y=\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$ 的最小值为 $-\frac{2}{9}$.

2.3 简单的三角恒等变换

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

对三角变换公式的理解和掌握，并运用于三角函数式进行化简与求值.

◆ **本节难点：**

三角恒等式的合理选择，三角函数公式的灵活运用.

二、教材编写意图

将一个三角函数式变为与之恒等的其他三角函数式的变换过程，称为三角恒等变换. 三角恒等变换公式繁多，已学过的有同角三角函数的关系式、诱导公式、两角和与差的三角函数公式、二倍角公式等. 本节在此基础上进一步学习半角公式、和差化积与积化和差公式及三角恒等变形的综合运用.

三、教学建议

1. 半角公式

半角公式实质上就是对二倍角的余弦公式的变形，即用$\frac{\alpha}{2}$分别代替降幂公式 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$中的 α 之后再开方得到的式子：

$$S_{\frac{\alpha}{2}}:\ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$C_{\frac{\alpha}{2}}:\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$T_{\frac{\alpha}{2}}:\ \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

在具体运用中，公式中“±”的取法应与$\frac{\alpha}{2}$所在象限相应三角函数值的符号相同. 教学中，一要讲清楚公式的来龙去脉，二要强调确定“±”的必要性和方法.

2. 和差化积与积化和差公式

教材是通过构造单位向量$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$，利用向量加法的平行四边形法则得到余弦和正弦的“和”化“积”公式的. 教学中要和前面推导两角差的余弦公式的思路做比较，进一步强化对向量法的认识和理解. 接着通过代换的思路方法，可以完整得出以下公式.

（1）和差化积公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

（2）积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

对这两组公式，不要求记住，教材上也没有全部给出证明(有的是练习题的要求). 但进行必要的归纳整理，引导学生认识它们的结构特征是有必要的(能记住当然更好).

这些公式是可以相互推导的，比如分别用$\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\frac{\pi}{2}-\beta$代替$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$中的$\alpha$，$\beta$，即可得$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. 教学中要引导学生作这样的探究，以进一步加深对三角变换思想和三角变换公式的认识.

3. 简单的三角变换的综合运用

本节课主要解决如何运用三角变换公式将形如$a\sin x+b\cos x$的三角函数式化归为$A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，即

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中$0\leqslant\varphi<2\pi$，由$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$确定. 这也是一个可作为公式使用的结论，在数学和物理学中均有着广泛的应用，常称为辅助角公式. 教学中要引导学生理解其来龙去脉，特别是φ的确定方法，并熟练掌握其应用规律.

4. 例题的教学分析

例 1 此例为直接运用半角公式求三角函数值. (1)和(2)的条件，学生容易混为一谈，教学中要引导学生认识它们之间的区别和联系. (2)的解答要分类讨论，教学中要让学生理解分类的依据和理由，从而加深对分类与整合的数学思想的理解.

例 2 此例给出的三角恒等式，能将半角的正切化归为关于单角的正弦、余弦的表达式，常可用于化简或证明其他的三角式子，因而可当公式使用. 教学中，虽然不要求记住这个恒等式（能记住当然更好），但要让学生明白这点.

例 3 本例所给出的也是关于半角和单角的恒等式. 通过这些等式，可将正弦、余弦、正切三类三角函数都统一为用半角的正切表示(在半角的正切有意义的条件下). 这种“统一量法”常能给解决三角函数问题带来极大的方便，因而本题的结论常称为“万能公式”. 教学要求同例 2.

例 4 本题就是推导两个积化和差公式，既是积化和差的思路和方法的运用，也是探讨得出新公式

的过程.

例 5 本题是和差化积在关于三角形三个内角的三角恒等式的证明中的应用. 教学中，要引导学生观察分析，理解三角函数式的化归与转化的正确方向.

例 6 本题为辅助角公式的直接运用. 教学中要指出，形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的函数，是一个重要的数学模型，它涉及三角函数的周期、最值、单调性等问题. 一般都是将 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 化归为 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 的形式进行处理. 这是一种模型化的数学思想.

例 7 本题是三角函数模型在探究乐器发出的声波的规律的数学应用题. 教学中除引导学生熟练掌握运用辅助角公式对三角函数式进行转化，并利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的规律求周期、最大值和最小值外，还应让学生明确三角函数是描述现实世界中呈周期性变化规律的数学模型，在日常生活和生产实践中有着广泛的应用，与必修第一册三角函数知识相呼应.

★补充例题

例 1 试求函数 $y=\dfrac{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}{\cos^2 2x}+\sqrt{3}\sin 2x$ 的最小值.

解： 因为
$$\begin{aligned}\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x&=(\sin x\sin 3x)\sin^2 x+(\cos x\cos 3x)\cos^2 x\\&=\frac{1}{2}[(\cos 2x-\cos 4x)\sin^2 x+(\cos 2x+\cos 4x)\cos^2 x]\\&=\frac{1}{2}[(\sin^2 x+\cos^2 x)\cos 2x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos 4x]\\&=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2x\cos 4x)=\cos 2x\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\cos^3 2x.\end{aligned}$$

所以 $y=\dfrac{\cos^3 2x}{\cos^2 2x}+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

当 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$，即 $2x+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$x=k\pi-\dfrac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，y 取最小值 -2.

说明： 本题为积化和差公式、倍角公式、辅助角公式的典型应用问题. 在对函数式的化简过程中，观察其结构特征，确定转化与化归的方向，是十分重要的策略.

例 2 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x\ (\omega>0)$，且 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(1) 求 ω 的值；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

解： (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\times\dfrac{1-\cos 2\omega x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x-\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x=-\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

因为 $f(x)$ 的图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $\omega>0$，所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=4\times\dfrac{\pi}{4}$，$\omega=1$.

(2) 由(1)知 $f(x)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当 $\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\dfrac{5\pi}{3}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{8\pi}{3}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

于是$-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此$f(x)$在区间$\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-1$.

说明：本题的解答运用了三角函数的图象和性质、倍角公式、辅助角公式等，综合性很强．简单的三角变换是研究三角函数的重要工具，如果涉及的三角函数式较为复杂，解题时一般要通过三角变换将其化归为较为简单的形式或熟悉的模型$y=A\sin(\omega x+\varphi)$．教学中要让学生明白这个道理.

5. 相关链接

丰富多彩的三角公式

三角函数公式多，如初中学习的锐角三角函数公式，必修第一册的诱导公式、同角三角函数的关系式，以及本章的两角和与差的三角函数、倍角公式、半角公式、和差化积公式、积化和差公式、万能公式等．它们看似繁多，但只要掌握了三角函数的本质及内部规律，就不难发现各个公式之间有着紧密的联系，而厘清其联系的规律性，是理解和掌握它们的关键.

上面列举的系列公式教材上都有，这里不作赘述．作为三角变换公式的进一步拓展，同时也作为三角变换训练问题，这里再提供一些题材.

1. 三个角的和公式

(1) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$；

(2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$；

(3) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\alpha\tan\gamma}$.

下面以(1)为例给出证明：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma)&=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\\&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma\\&=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

同理可证公式(2)，由(1)和(2)两式相除即得(3).

2. 三倍角公式及其变式

(1) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$；

(2) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)$；

(3) $\tan 3\alpha=\tan\alpha\tan(60^\circ+\alpha)\tan(60^\circ-\alpha)$.

下面同样以(1)为例，给出这组公式的证明：

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\\&=4\sin\alpha\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right)\\&=4\sin\alpha(\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha)\\&=4\sin\alpha(\sin 60^\circ+\sin\alpha)(\sin 60^\circ-\sin\alpha)\\&=4\sin\alpha\cdot 2\sin\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{60^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\end{aligned}$$

$=4\sin\alpha\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)$.

同理可证公式(2)，公式(3)由(1)和(2)两式相除即得.

3. 其他公式

(1) 由两角和的正切公式 $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$，直接变形可得“正切的和差化积”公式：

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta).$$

(2) 由和差化积公式，可得 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

即 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

同理可得 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

这两个恒等式，可称为三角函数的平方差公式.

(3) 对于任意非直角三角形，设 α，β，γ 为三个内角，利用 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 和相应的三角变换公式，可得下面的等式：

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

相关的公式还有许多，由此可见三角函数公式的丰富多彩. 这些公式不要求学生记忆，但可要求学生有选择地学习. 不少习题就是由其中的某些结论取特殊情况编写的，如不少参考资料中均可见的“求 $\sin 10°\sin 50°\sin 70°$”这类问题，只要运用三倍角公式及其变式，即可得

$$\sin 10°\sin 50°\sin 70°=\frac{1}{4}\times 4\sin 10°\sin(60°-10°)\sin(60°+10°)$$

$$=\frac{1}{4}\times\sin 30°$$

$$=\frac{1}{8}.$$

因此，熟悉这些等式的背景，对提高数学解题能力是十分有益的.

Ⅲ. 教学设计案例

2.1.1 两角和与差的余弦公式（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）在两角和与差的余弦公式的推导中，感悟“算两次”（同一个对象用两种方法计算，得出一个等式，从而通过对这个等式的研究实现解题目标）的数学思想方法.

（2）理解和掌握两角和与差的余弦公式，并能运用它们进行三角函数的化简和求值.

（3）培养学生的逻辑推理、数学抽象、数学运算素养.

2. 教学重难点

重点：两角和与差的余弦公式的理解和应用.

难点：两角差的余弦公式推导过程中的数学思想方法的认识和理解.

3. 教学基本流程

创设情境，提出课题

↓

构造模型，推导公式

↓

互动探究，深化理解

↓

公式运用，问题解决

↓

归纳小结，布置作业

4. 教学情境设计

问题		问题设计意图	师生活动
创设情境	问题 1. 等式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 成立吗？请举例说明. 问题 2. 已知 α，β 的正弦或余弦值，如何求出 $\cos(\alpha-\beta)$呢？	通过问题引路，引导学生自然地提出问题，从而引入课题. 引导学生从数学的视角观察发现.	通过举反例，否定问题 1 的成立.（可放手让学生尽情发挥） 在否定问题 1 的前提下自然地提出问题 2. 如何探求 $\cos(\alpha-\beta)$的关系式？指出可考虑构造关于 $\cos(\alpha-\beta)$的方程.
构造模型	问题 3. 如图所示(见教材 P. 67 图 2.1－2)，你能用两种方法计算向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积吗？ 问题 4. 由问题 3 可得出 $\cos(\alpha-\beta)$关于 α，β 的三角函数的关系式吗？ 进一步，能由关于 $\cos(\alpha-\beta)$的公式得到关于 $\cos(\alpha+\beta)$的公式吗？	由此体会“算两次”的数学思想方法. 体会代换思想在推导三角变换公式中的运用.	教材是最重要的教学资源，要引导学生观察教材 P. 67 图 2.1－2，自主发现两种方法计算 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积的价值. 得出两角差的余弦公式后，要引导学生认识公式中 α 和 β 的任意性，进而通过代换法推出两角和的余弦公式.
互动探究	问题 5. 两角和与差的余弦公式，在结构上有怎样的特征呢？请同学们观察发现并用简明的语言表述清楚. 问题 6. 还有其他的代换方法能得到两角和的余弦公式吗？请同学们讨论交流.	引导学生观察提炼公式的特征，深化对公式的理解与掌握. 体会推导三角变换公式的灵活性.	两角和与差的余弦公式结构相同，符号有差异，“＝”两边分别为“－，＋”和“＋，－”. 用 $\pi-\alpha$ 替换两角差的余弦公式中的 α，同样可得两角和的余弦公式. 这种思维方法的基础，仍然是基于公式中 α，β 的任意性.
公式运用(1)	例 1. 详见教材 P. 68 例 1. 例 2. 详见教材 P. 69 例 2. 例 3. 详见教材 P. 69 例 3.	引导学生观察分析，熟练掌握公式的运用过程.	例 1 为公式的正用；例 2 为公式的逆用；例 3 为公式的综合运用. 教学中宜先学生自主体验，再在教师指导下总结提炼.
公式运用(2)	例 4. 不查三角函数表，试求 $\sin 7^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\cos 67^\circ$ 的值. 例 5. 在△ABC 中，已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，试求 $\cos C$ 的值.		例 4 为公式的变形用，也为下一课时内容埋下伏笔. 这两例视学情而定，在学生能够接受的前提下选用.
归纳小结	1. 本课学习了两角和与差的余弦公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. 公式可以正用、逆用，还可以变形运用. 在公式的综合运用中，常要由某已知角的正弦(余弦)值计算它的余弦(正弦)值，此时要特别注意符号的确定. 2. 在推导两角差的余弦公式时，用两种方法计算同一个数值(数量积)，从而得到一个等式，再利用这个等式解决相应问题. 这种思想方法就是方程思想，常形象地称为“算两次”. 3. 两角和与差的余弦公式中的 α，β 可以是任意的数值或算式，它是代换法的基础.		
课堂练习：教材 P. 69 练习 1，2，3.			
作业：教材 P. 75 习题 2.1　1，2，3.			

2.2 二倍角的三角函数（第 1 课时）

1. 教学目标

（1）在两角和与差的三角函数的基础上推导出二倍角的正弦、余弦和正切公式.

（2）初步运用两角和与差的正弦、余弦和正切公式进行三角函数式的运算求解或推理论证.

（3）经历代换推导公式，培养学生的逻辑推理、数学运算素养.

2. 教学重难点

重点：二倍角的正弦、余弦和正切公式的推导及应用.

难点：灵活运用二倍角的正弦、余弦和正切公式进行三角变换.

3. 教学基本流程

创设情境，提出课题

↓

运用模型，推导公式

↓

互动探究，深化理解

↓

公式运用，问题解决

↓

归纳小结，布置作业

4. 教学情境设计

问题		问题设计意图	师生活动
提出课题	提出问题：两角和的正弦、余弦、正切公式中的 α，β 可以取使相应的三角函数有意义的任何数值或式子，你考虑过它们在某些特殊关系时公式的形式及其应用吗？	通过问题引路，引导学生自然地提出问题，从而引入课题.	公式中 α，β 可以是不同的关系，如相等关系 $\alpha=\beta$，倍数关系 $\alpha=2\beta$ 等. 简单的公式或许有着不平凡的应用价值，$\alpha=\beta$ 的情形就是本课要学的二倍角的三角函数.

续表

<table>
<tr><th colspan="2">问题</th><th>问题设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>推导公式</td><td>在两角和与差的正弦、余弦、正切公式中(要求不看教材各自独立写出)，分别取 $\alpha=\beta$，得到各公式的特殊形式：
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.
思考二倍角的余弦公式 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 可能进一步的变形，并鉴赏两个变式：
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$.</td><td>引导学生进一步认识三角公式中角的任意性的应用.
由此体会从一般到特殊的逻辑推理的价值.
体会二倍角的余弦公式的三种不同形式的各自特点以及在三角函数式的化简与求值中的不同功能.</td><td>通过讨论交流，深刻领会二倍角的正弦、余弦、正切公式，作为相应的两角和的三角函数公式的必要条件而存在的特征.
通过交流讨论，归纳出各公式的特征，进一步理解和掌握(识记)每一个公式.</td></tr>
<tr><td>互动探究</td><td>提出是否还有其他推导二倍角的正弦、余弦和正切公式的思路的问题，如由二倍角的正弦公式推得二倍角的余弦公式，引导学生合作交流.</td><td>多角度认识公式的生成，培养学生逻辑推理的核心素养.</td><td>要放手引导学生自主发现，多角度探究公式的来龙去脉，进一步加强三角变换中转化与化归思想的认识.</td></tr>
<tr><td>问题解决(1)</td><td>例 1. 教材 P. 77 例 1.
例 2. 教材 P. 78 例 2.
例 3. 教材 P. 78 例 3.</td><td>例 1 是直接运用二倍角公式求三角函数值，目的在于让学生初步体验二倍角公式的运用过程.
例 2 中(1)为公式的直接运用，(2)为公式与(1)的结论的综合运用，(3)为两角差的正切公式与二倍角的正切公式的综合运用.
例 3 为运用二倍角的余弦公式证明恒等式.</td><td>讨论例 1 中求 $\tan 2\alpha$ 是否还有其他方法.
例 3 中要尝试多角度证明三角恒等式的思路.</td></tr>
<tr><td>问题解决(2)</td><td colspan="2">例 4. 求函数
$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$ 的最小正周期.</td><td>初步认识二倍角三角函数公式的综合运用，要鼓励学生尝试用多种方法解题.</td></tr>
<tr><td>归纳小结</td><td colspan="3">1. 本课学习了二倍角的三角函数公式：
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.
公式可以正用、逆用，还可以变形运用. 在二倍角的余弦公式的应用中，要根据问题的需要灵活选择不同的形式.
2. 转化与化归是二倍角的三角函数公式的推导和应用的基本思想，要深刻领会和灵活运用.</td></tr>
<tr><td colspan="4">课堂练习：教材 P. 78 练习 1，2，3.</td></tr>
<tr><td colspan="4">作业：教材 P. 80～81 习题 2.2　1，2，3，4，8.</td></tr>
</table>

2.3 简单的三角恒等变换（第 2 课时）

1. 教学目标

在前述知识基础上，进一步学习半角公式、和差化积与积化和差公式及三角恒等变形的综合应用，培养学生的逻辑推理、数学运算素养.

2. 教学重难点

重点：对积化和差与和差化积公式的理解和掌握，并运用于三角函数式的化简与求值.

难点：对积化和差与和差化积公式的发现和推导过程的理解.

3. 教学基本流程

创设情境，提出课题

↓

运用模型，推导公式

↓

互动探究，深化理解

↓

公式运用，问题解决

↓

归纳小结，布置作业

4. 教学情境设计

问题		问题设计意图	师生活动
提出课题	回忆用向量方法推导两角差的余弦公式的思想方法，接着给出教材 P. 85 图2.3-1，并提出下面的问题：你能用两种方法表示平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC 所对应的向量 $\overrightarrow{OC}$ 吗？	引导学生回忆，联想已学过的推导两角差的余弦公式的思想方法，并移植过来为本课要解决的问题所用.	先回忆已学过的推导两角差的余弦公式的思想方法，再观察教材 P. 85 图 2.3-1 的特点，说明两种方法得出 $\overrightarrow{OC}$ 的不同的表示式，并让学生思考由此能得出什么有用的公式.

续表

	问题	问题设计意图	师生活动
推导公式(1)	在前面回顾的基础上，得出 $\overrightarrow{OC}=\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\right.$ $\left.2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$ $(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$. 由上面向量 $\overrightarrow{OC}$ 的两种坐标形式，推得和差化积 $\cos\alpha+\cos\beta=\cdots$ $\sin\alpha+\sin\beta=\cdots$ 并在此基础上，通过代换法推得： $\cos\alpha-\cos\beta=\cdots$ $\sin\alpha-\sin\beta=\cdots$ 这就得到了和差化积公式.	进一步深化“算两次”的数学思想的理解和运用. 认识和差化积公式的结构特征.	教师引领学生观察发现. 具体过程可以是，先教师引导观察分析，接下来学生阅读教材，最后学生脱离教材书写推导过程.
推导公式(2)	讲解教材 P. 86 例 4，得出： $\sin\alpha\sin\beta=\cdots$ $\cos\alpha\cos\beta=\cdots$ 再引导学生自己推导，得出： $\sin\alpha\cos\beta=\cdots$ $\cos\alpha\sin\beta=\cdots$ 由此归纳出积化和差公式.	进一步强调三角变换的基本思想，就是转化与化归.	三角函数的和差化积与积化和差公式，不要求记忆，但仍要辨析它们在结构上的区别和联系，为运用公式积累基本的数学活动经验.
互动探究	引导学生从新的视角认识三角函数的和差化积与积化和差公式.	多角度认识公式的生成，培养学生的逻辑推理素养.	这些公式是可以相互推导的，比如分别用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\frac{\pi}{2}-\beta$ 代替 $\cos\alpha+\cos\beta=\cdots$ 中的 α，β，即可得 $\sin\alpha+\sin\beta=\cdots$. 教学中要引导学生作这样的探究，以进一步加深对三角变换思想和三角变换公式的认识.
问题解决(1)	教材 P. 87 例 5.	本题是和差化积在关于三角形三个内角的三角恒等式的证明中的应用.	教学中，要引导学生观察分析，理解三角函数式的化归与转化的正确方向.
问题解决(2)	补充例题：试求函数 $y=\frac{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}{\cos^2 2x}+\sqrt{3}\sin 2x$ 的最小值.		初步认识三角函数的和差化积与积化和差的综合运用.
归纳小结	1. 本课学习了三角函数的和差化积与积化和差公式. 这些公式不要求记忆，但要求理解它们的结构特征，积累基本的解题活动经验. 2. 转化与化归是二倍角的三角函数公式的推导和应用的基本思想，要深刻领会和灵活运用.		
课堂练习：教材 P. 87 练习 1，2，3.			
作业：教材 P. 90～91 习题 2.3　1，2，3，4，9.			

Ⅳ. 本章小结与评价

本章学业要求

1. 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式.
2. 掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式.
3. 能够运用三角恒等变换的公式进行简单的三角恒等变换.

重点提升逻辑推理、数学运算素养.

本章小结

本章先利用平面向量的数量积推导出了两角差的余弦公式，再通过变换推导出两角和与差的余弦、正弦和正切公式，二倍角的正弦、余弦和正切公式，半角公式，和差化积、积化和差等一系列公式.

1. 三角函数式的化简与求值是三角变换公式的一个重要的应用. 在这类问题的解决中，经常要正向、逆向或变形运用三角变换公式. 理解和掌握各公式的来龙去脉，掌握三角变换的一般规律和基本策略，是分析和解决这类问题的基础.

2. 三角变换是求解三角函数最值问题的有力工具. 三角函数的最值问题是三角函数基础知识的综合运用，它往往与二次函数、三角函数的图象、函数的单调性等知识联系在一起，具有一定的综合性. 在求解这类问题时，一要注意三角变换的基本方向，二要注意诸如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的模型的运用. 求三角函数最值时，代数中求最值的方法均是适用的，诸如配方法、换元法、判别式法等，运用中要特别注意三角函数值的取值范围的确定(当然与角的取值范围密切相关).

3. 三角变换在其他问题中的综合运用. 在高中数学中，三角函数是一个联系性十分广泛的内容. 平面向量与三角函数的综合运用就是重要的一个方面. 三角函数为平面向量提供了有力的工具，将三角函数与平面向量相结合就会产生一系列综合性问题. 这些问题的解决，常需要综合运用包括三角变换在内的数学知识和思想方法，全方位地进行数学思考. 当然，进一步学习高中数学的立体几何、解析几何、复数等内容后，三角变换的应用空间会变得更加广阔.

本章评价建议

对于本章的教学，要引导学生关注这样几个方面：一是要认识到公式中的每一个角可以用使得三角函数有意义的一切字母、数值或代数式代换，这是三角公式丰富多彩的原因，也是应用广泛性的基础. 二是可以从多角度探究公式网络的建立，深刻领会三角变换思想的灵活性. 例如，教材是从向量的数量

积及其坐标运算的角度证明两角差的余弦公式的，其实除此之外还有运用三角函数线、两点间的距离公式等多种方式，教学中虽然不求面面俱到，但可引导学生从这些方面进行探究，并比较不同方式的优劣，从而深化理解和认识. 三是三角公式的变换是丰富多彩的，教材给出了一个网络图，但事实上公式之间的推理是可以有多种路径的，比如，教材是由 $S_{(\alpha-\beta)}$ 通过用 $-\beta$ 替换其中的 β 而得出公式 $S_{(\alpha+\beta)}$ 的，教学中可引导学生考虑用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 替换 $C_{(\alpha-\beta)}$ 中的 α，从而得出 $S_{(\alpha+\beta)}$. 四是在教材所给出的现有公式的基础上，还可以推出许多很有价值的结论，这些结论不要求学生记忆，但以训练题的方式供学生练习，能使学生加强对三角变换中转化与化归思想的认识，发展数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学建模、数学运算等核心素养.

本章检测试题

一、选择题

1. 求值：$\sin\frac{\pi}{12}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}=$（　　）

A. 0　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

2. $\sqrt{1+\cos 100^\circ}-\sqrt{1-\cos 100^\circ}$ 的值为（　　）

A. $-2\cos 5^\circ$　　B. $2\cos 5^\circ$　　C. $-2\sin 5^\circ$　　D. $2\sin 5^\circ$

3. $\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 97^\circ-\tan 23^\circ-\tan 97^\circ$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 0

4. 已知 $\sin x=\frac{1}{4}$，且 x 为第二象限的角，则 $\sin 2x=$（　　）

A. $-\frac{3}{16}$　　B. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

5. 若 $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为（　　）

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. 1　　D. $\frac{29}{15}$

6. $\cos 72^\circ-\cos 36^\circ$ 的值为（　　）

A. $3-2\sqrt{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{4}$

7. 若 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 是第三象限的角，则 $\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

8. 已知 α 为锐角，且 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin(\pi-\alpha)=$（　　）

A. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　C. $\frac{3\pm4\sqrt{3}}{10}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}\pm3}{10}$

9. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\cos(2\pi-\theta)$，且 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则 $\tan 2\theta=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{15}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{7}$　　C. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

10. 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后与原函数的图象重合，则实数 ω 的可能值是（　　）

A. 6　　B. 10　　C. 12　　D. 16

11.（多选题）已知函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$，则下列区间中 $f(x)$ 在其上单调递增的是（　　）

A. $\left(\frac{4\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$　　E. $\left(-\frac{2\pi}{3},\ 0\right)$

12.（多选题）已知 $f(x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，若 $a=f(\lg 5)$，$b=f\left(\lg\frac{1}{5}\right)$，则（　　）

A. $a+b=0$　　B. $a-b=0$　　C. $a+b=1$　　D. $a-b=\sin(2\lg 5)$　　E. $a-b=1$

二、 填空题

13. 求值：$\cos 15^\circ\cos 105^\circ-\sin 15^\circ\sin 105^\circ=$________.

14. 化简：$\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=$________.

15. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，不等式 $8x^2-8x\sin\alpha+\cos 2\alpha\geqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 α 的取值范围是________.

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{a}\sin[(1-a)x]+\cos[(1-a)x]$ 的最大值为 2，则 $f(x)$ 的最小正周期为________.

三、 解答题

17. 已知角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

（1）求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

（2）若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

18. 在△ABC 中，$\tan B+\tan C+\sqrt{3}\tan B\tan C=\sqrt{3}$，且 $\sqrt{3}\tan A+\sqrt{3}\tan B+1=\tan A\tan B$，试判断△$ABC$ 的形状.

19. 已知 α，β 为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值；

(2) 求 $\tan(\alpha-\beta)$的值.

20. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$的最小正周期；

(2) 求证：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

21. 在锐角$\triangle ABC$ 中，A，B，C 为三个内角，且 $\sin 2A=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 求 $\sin B+\sin C$ 的取值范围.

22. 已知向量$\boldsymbol{a}=(m,\ \cos 2x)$，$\boldsymbol{b}=(\sin 2x,\ n)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，且 $y=f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{12},\ \sqrt{3}\right)$和点$\left(\frac{2\pi}{3},\ -2\right)$.

(1) 求 m，n 的值；

(2) 将 $y=f(x)$的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$个单位长度后得到函数 $y=g(x)$的图象，若 $y=g(x)$图象上各最高点到点$(0,\ 3)$的距离的最小值为 1，求函数 $y=g(x)$的单调递增区间.

参考答案

一、选择题

1. B　2. C　3. C　4. B　5. A　6. C　7. A　8. A　9. B　10. D　11. ACE　12. CD

二、填空题

13. $-\frac{1}{2}$　14. $\tan\frac{x}{2}$　15. $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\ \pi\right]$　16. π

三、解答题

17. (1) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$，得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(2) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$，得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. 由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，得

当 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$时，$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{56}{65}$.

当 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$时，$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{16}{65}$.

18. $\tan A=\tan[180°-(B+C)]=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan B\tan C}{\tan B\tan C-1}=-\sqrt{3}$，而 $0°<A<180°$，所以$\angle A=120°$.

又 $\tan C=\tan[180°-(A+B)]=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\frac{\tan A+\tan B}{\sqrt{3}\tan A+\sqrt{3}\tan B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，而 $0°<C<180°$，所以$\angle C=30°$.

所以$\angle B=180°-120°-30°=30°$.

所以$\triangle ABC$ 是顶角为 120°的等腰三角形.

19. (1) 因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

又因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

(2) 因为 α，β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\ \pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2$.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$.

20. (1) 因为 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x-\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 因为$-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

即当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

21.（1）因为 $\sin 2A=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$，所以 $2\sin A\cos A=\sqrt{3}\cos A$，即 $(2\sin A-\sqrt{3})\cos A=0$.

又因为△ABC 是锐角三角形，所以 $A\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos A>0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$，

$\sin B+\sin C=\sin(A+C)+\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)+\sin C=\sqrt{3}\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$.

又因为在锐角△ABC 中，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{2\pi}{3}-C$，即$\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{3}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$.

由正弦函数的单调性可知，$\sin B+\sin C$ 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},\ \sqrt{3}\right]$.

22.（1）由题意，知 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m\sin 2x+n\cos 2x$.

因为 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},\ \sqrt{3}\right)$ 和点 $\left(\frac{2\pi}{3},\ -2\right)$，

所以$\begin{cases}\sqrt{3}=m\sin\frac{\pi}{6}+n\cos\frac{\pi}{6},\\-2=m\sin\frac{4\pi}{3}+n\cos\frac{4\pi}{3},\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{3}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n,\\-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=\sqrt{3},\\n=1.\end{cases}$

（2）由（1）得 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由题意，知 $g(x)=f(x+\varphi)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$. 设 $y=g(x)$ 的图象上符合题意的最高点为 $(x_0,\ 2)$，则 $x_0^2+1=1$，$x_0=0$，即到点 $(0,\ 3)$ 的距离为 1 的最高点为 $(0,\ 2)$.

将其代入 $y=g(x)$ 得 $\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $y=g(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

Ⅴ. 教材练习（习题）答案

2.1 两角和与差的三角函数

练习（第 69 页）

1.（1）略

（2）$\cos\alpha=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{2}$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

2.（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}$ （2）$\frac{1}{2}$ （3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

练习（第 71 页）

1.（1）$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ （2）$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2.（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$ （2）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 由条件得$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，设$P'(x',\ y')$，则

$x'=5\cos(\alpha+45^\circ)=5(\cos\alpha\cos45^\circ-\sin\alpha\sin45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$y'=5\sin(\alpha+45^\circ)=5(\sin\alpha\cos45^\circ+\cos\alpha\sin45^\circ)=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

所以点 P'的坐标是$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

练习（第 74 页）

1.（1）$-\frac{16+17\sqrt{3}}{47}$ （2）$\frac{16-17\sqrt{3}}{13}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 因为$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，所以$1=\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，即

$1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$，变形即得$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$.

4. 由条件得 $\tan\angle DBC=\dfrac{1}{3}$，$\tan\angle DEC=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\tan(\angle DBC+\angle DEC)=\dfrac{\tan\angle DBC+\tan\angle DEC}{1-\tan\angle DBC\cdot\tan\angle DEC}=\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}}=1$，

故$\angle DBC+\angle DEC=45^\circ$.

习题 2.1（第 75 页）

1. 略　2. (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. (1) $-\dfrac{16}{65}$　(2) $\dfrac{56}{65}$

4. (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $\dfrac{1}{2}$

5. (1) 略　(2) 略

6. $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　7. (1) $\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. -2　9. 7　10. $-\dfrac{5}{7}$

11. 由 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，知 $\alpha-\dfrac{\pi}{3}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，再由 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{12}{13}$，得 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{13}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5+12\sqrt{3}}{26}$.

12. 设 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，则 $4k\pi-\pi<2\alpha<4k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，故 2α 为第三象限或第四象限的角. 因为 $\cos 2\alpha=-\dfrac{4}{5}<0$，故 2α 只能为第三象限角，则 $\sin 2\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\dfrac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{4}}=7$.

13. $\tan 112^\circ30'+\tan 22^\circ30'=\tan(112^\circ30'+22^\circ30')\cdot(1-\tan 112^\circ30'\tan 22^\circ30')=\tan 135^\circ\cdot\left(1-\dfrac{\sin 112^\circ30'}{\cos 112^\circ30'}\cdot\dfrac{\sin 22^\circ30'}{\cos 22^\circ30'}\right)=(-1)\times\left(1-\dfrac{\cos 22^\circ30'}{-\sin 22^\circ30'}\times\dfrac{\sin 22^\circ30'}{\cos 22^\circ30'}\right)=(-1)\times[1-(-1)]=-2$.

14. (1) 在$\triangle DEC$ 中，由正弦定理，得$\dfrac{DE}{\sin\angle DCE}=\dfrac{EC}{\sin\angle ADC}$，

故 $\sin\angle DCE=\dfrac{DE\sin\angle ADC}{EC}=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos\angle DCE=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，所以

$$\sin\angle CED=\sin(\pi-\angle ADC-\angle DCE)=\sin(\angle ADC+\angle DCE)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(2) 因为 $\cos\angle AEB=\cos(\pi-\angle BEC-\angle CED)=-\cos(\angle BEC+\angle CED)$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

所以在 Rt$\triangle ABE$ 中，$BE=\dfrac{AE}{\cos\angle AEB}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{7}}{14}}=4\sqrt{7}$.

15. (1) 在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得

$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}=\dfrac{(\sqrt{7})^2+1^2-2^2}{2\times\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

(2) 由 $\cos\angle BAD=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，知 $\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

$\sin\angle CAB=\sin(\angle BAD-\angle CAD)=\sin\angle BAD\cos\angle CAD-\cos\angle BAD\sin\angle CAD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $BC=\dfrac{AC\sin\angle CAB}{\sin\angle ABC}=3$.

16. 由已知条件得 $\tan\alpha+\tan\beta=-3$，$\tan\alpha\tan\beta=c$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3}{1-c}$.

又 $\cos(\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$，即 $\tan(\alpha+\beta)=-1$，所以$\dfrac{-3}{1-c}=-1$，解得 $c=-2$.

17. (1) 由已知条件得$-\dfrac{\pi}{4}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

(2) 设 OM 与 x 轴负方向所夹的最小正角为α，ON 与 x 轴正方向所夹的最小正角为β，则 $\alpha=60^\circ$，$\beta=30^\circ$，进一步得 $\theta=180^\circ-60^\circ+30^\circ=150^\circ$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2.2 二倍角的三角函数

练习（第 78 页）

1. (1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　(4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{7}{24}$

3. (1) 左边$=\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{2}{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}=\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}=\tan\theta=$右边.

(2) 左边$=\sin\theta(1+2\cos^2\theta-1)=2\sin\theta\cos^2\theta=\sin 2\theta\cos\theta=$右边.

练习（第 80 页）

1. $\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{2}\left(\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$$=2(\cos\alpha+\sin\alpha)=2\times\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{14}{5}.$$

2. (1) 左边$=3+2\cos^2 2\alpha-1-4\cos 2\alpha=2(\cos 2\alpha-1)^2=8\sin^4\alpha=$右边.

(2) 左边$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}\tan\alpha+\frac{1}{2}=\text{右边}.$$

3. 设$\odot O$的半径为R，则$S_{\odot O}=\pi R^2$，$AC=2R\sin\angle ABC$，$BC=2R\cos\angle ABC$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AC=2R^2\sin\angle ABC\cos\angle ABC=R^2\sin 2\angle ABC$.

由$\dfrac{S_{\odot O}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\pi R^2}{R^2\sin 2\angle ABC}=\dfrac{\pi}{\sin 2\angle ABC}=2\pi$，得$\sin 2\angle ABC=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle ABC=15^\circ$.

习题 2.2（第 80 页）

1. (1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. (1) $1+\sin 2\alpha$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\cos 40^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=\cos 40^\circ\cdot\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{2\cos 40^\circ\sin(30^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=1.$

(4) $-\cos 2\alpha$　(5) $-\tan 2\alpha$　(6) 2

3. $\sin 2\alpha=\dfrac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$

4. $\sin 2\alpha=-\dfrac{120}{169}$，$\cos 2\alpha=\dfrac{119}{169}$，$\tan 2\alpha=-\dfrac{120}{119}$.

5. 因为$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos 2x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以当$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{8}$时，$f(x)$取到最大值$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；当$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$，即$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)$取到最小值 0.

6. 设$\angle AOC=\alpha$，则$CF=\sin\alpha$，$OF=\cos\alpha$，$OE=\dfrac{CF}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，所以矩形$CDEF$的面积$S=(OF-OE)\cdot CF=\left(\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

当$2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$S$取到最大值.

所以当点C为弧AB的中点时，矩形$CDEF$面积最大，此时$\angle AOC=30^\circ$.

7. (1)由题意容易知道，$\tan\angle MOQ=\sqrt{3}$，$\angle MOQ=60^\circ$. 由$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，知$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以$\cos\angle POQ=\cos(60^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.

(2) 因为$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}OM(MQ-MP)=\dfrac{1}{2}\cos\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)=-\dfrac{1}{2}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，当$\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$时，$S_{\triangle OPQ}$取到最大值$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

8. 设等腰三角形的顶角为 α，底角为 β，则 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\sin\alpha=\frac{12}{13}$，所以 $\cos 2\beta=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，即 $2\cos^2\beta-1=-\frac{5}{13}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\sin\beta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\tan\beta=\frac{3}{2}$.

故等腰三角形底角的正弦、余弦、正切值分别为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\frac{3}{2}$.

9. 因为 $f(x)=\frac{1}{2}\cos^2x-\frac{1}{2}\sin^2x+1-\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}\cos 2x+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$，单调递增区间为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{5}{6}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

10. 设木棒的长为 l，木块的高为 a，由杠杆原理知

$$mg\cdot\frac{1}{2}l\cos\theta=\frac{a}{\sin\theta}\cdot|\boldsymbol{F}|.$$

解得 $|\boldsymbol{F}|=\frac{mgl}{2a}\cdot\sin\theta\cos\theta=\frac{mgl}{4a}\cdot\sin 2\theta$.

所以 $|\boldsymbol{F}|$ 先增大后减小，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$|\boldsymbol{F}|$ 取最大值.

2.3 简单的三角恒等变换

练习（第 84 页）

1. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{14}}{4}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 由 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，得 $\tan\alpha=3$，

所以 $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{3}{4}$.

练习（第 87 页）

1. 由两角和与差的正弦公式，得 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

两式相加，得 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$. ①

两式相减，得 $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$. ②

令 $A+B=\alpha$，$A-B=\beta$，则 $A=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$B=\frac{\alpha-\beta}{2}$，分别代入①②，得

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

(2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 由两角和与差的正弦公式，得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

（1）两式相加，得 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

（2）两式相减，得 $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.

3. （1）$\dfrac{1}{2}\sin\alpha$　（2）0

练习（第 90 页）

1. （1）$3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\varphi)$，其中 φ 满足 $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$，$\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$.

（2）$-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. （1）2　（2）$\sqrt{3}$

3. 因为 $A'B=A'B'\cos\alpha$，$AA'=A'D'\sin\alpha$，故 $AB=A'B'\cos\alpha+A'D'\sin\alpha$，同理，$AD=A'B'\cdot\sin\alpha+A'D'\cos\alpha$. 所以矩形 $ABCD$ 的周长 l 和矩形 $A'B'C'D'$ 的周长 l' 满足

$$l=2(A'B'\cos\alpha+A'D'\sin\alpha+A'B'\sin\alpha+A'D'\cos\alpha)=l'(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

由此得 $l'=\dfrac{l}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{l}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$. 当 $\alpha=0°$时，l' 取得最大值 l.

习题 2.3（第 90 页）

1. （1）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（2）$2\sqrt{2}$

2. $\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$.

3. （1）$\cos 15°\cos 75°=\dfrac{1}{2}[\cos 90°+\cos(-60°)]=\dfrac{1}{4}$.

（2）$\sin 20°\sin 40°\sin 80°=(\sin 20°\sin 40°)\sin 80°=\dfrac{1}{2}(\cos 20°-\cos 60°)\sin 80°$

$$=\frac{1}{2}\cos 20°\sin 80°-\frac{1}{4}\sin 80°=\frac{1}{4}(\sin 100°+\sin 60°)-\frac{1}{4}\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

4. （1）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（2）0　（3）$\dfrac{1}{2}$

5. 因为 $f(x)=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 由条件知 $\alpha+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\sin\alpha=\sin\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\cos\varphi=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 因为 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，即 $\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，

即 $\dfrac{3}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，即 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

7. (1) $S=S_{\triangle COP}+S_{\triangle CQQ}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin\theta+\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$.

(2) 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，S 取得最大值 2.

8. 连接 AC，设 AC 与 AB 所成角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{1.5}{2.5}=0.6$，所以 $\alpha\approx 30.96^\circ$.

要使衣柜顺利通过房门，则 $AC\cdot\sin(\alpha+\theta)\leqslant 2.2$.

即 $\sin(\theta+30.96^\circ)\leqslant\frac{2.2}{\sqrt{1.5^2+2.5^2}}\approx 0.75$.

又 $\sin 48.59^\circ\approx 0.75$，所以 $\theta+30.96^\circ\leqslant 48.59^\circ$，即 $\theta\leqslant 17.63^\circ$.

因此，衣柜的倾斜角 θ 应在 17.63° 以下，才能顺利通过房门.

9. 由 $\frac{2\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-3\cos\theta}=-5$，得 $\tan\theta=2$，

所以 $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta=\frac{3(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}+\frac{4\times 2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{7}{5}$.

10. 由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$，得 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{3}{4}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$.

由于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$ 为第二象限角，

所以 $\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，因此 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

11. $\frac{3}{4}$

12. (1) $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x-\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，故函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.

(2) 由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 取到最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$；当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 取到最小值 $-\frac{3}{2}$.

13. (1) 由已知条件得 $\tan x=-\frac{3}{2}$，

所以 $2\cos^2 x-\sin 2x=1+\cos 2x-\sin 2x=1+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{20}{13}$.

(2) 因为 $f(x)=\left(\sin x+\cos x,\ \frac{1}{2}\right)\cdot(\cos x,\ -1)=\sin x\cos x+\cos^2 x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$.

复习题二（第 96 页）

1. 由题设条件，知 $\sin\angle AOB=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle AOB=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\angle AOC=\cos\left(\angle AOB-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. $\frac{8}{3}$　3. $\frac{a^2+b^2-2}{2}$

4. $\dfrac{\sin 63^\circ-\sin 33^\circ\cos 30^\circ}{\cos 33^\circ}=\dfrac{\sin 63^\circ-\dfrac{1}{2}(\sin 63^\circ+\sin 3^\circ)}{\cos 33^\circ}=\dfrac{\sin 63^\circ-\sin 3^\circ}{2\cos 33^\circ}=\dfrac{2\cos 33^\circ\sin 30^\circ}{2\cos 33^\circ}=\dfrac{1}{2}$.

5. 由已知条件得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\dfrac{11}{14}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{7}$.

6. (1) $\dfrac{\pi}{4}$　(2) -3

7. 由已知条件得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}$，所以

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2\cos\alpha\right)=-\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

8. (1) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$　(2) $\dfrac{33}{65}$　(3) $\dfrac{5}{6}$

9. 计算可得 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$，由 $\cos 54^\circ=\sin 36^\circ$，得 $\cos(3\times18^\circ)=\sin(2\times18^\circ)$，

即 $4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ$，即 $4(1-\sin^2 18^\circ)-3=2\sin 18^\circ$，

解得 $\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

10. $\dfrac{3}{4}$

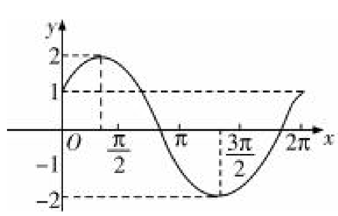
11. 因为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，α 是第四象限角，所以 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，故

$$\frac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}=3.$$

12. 因为 $y=\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\cos x\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)=\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以最大值为 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

13. 因为 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$，所以 $a=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in[0, 2\pi]$.

作出函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图象如图所示.



由已知方程$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$在$[0,\ 2\pi]$上恰有两个不同的实数解，知函数$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象与直线$y=a$恰有两个不同的交点，结合图象，易得$a$的取值范围为$(-2,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

14. 由$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$，得$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{3}{4}$，即$\tan\alpha=-\dfrac{1}{7}$，$\cos\alpha=-7\sin\alpha$.

由$\tan\alpha=-\dfrac{1}{7}$，得α是第三象限或第四象限的角.

由$\cos\alpha=-7\sin\alpha$两边平方，得$1-\sin^2\alpha=49\sin^2\alpha$，$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

所以$\sin\alpha+\cos\alpha=-6\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

15. 设$\angle PCB=\alpha$，$\angle QCD=\beta$，$BP=x$，$DQ=y$，则$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x+y}{1-xy}$.

因为$1-x+1-y+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=2$，所以$\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=x+y$.

两边平方，化简得$x+y=1-xy$，所以$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$. 所以$\angle PCQ=\dfrac{\pi}{4}$.

16. (1) $L=\dfrac{b}{\sin\theta}+\dfrac{a}{\cos\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) 记$y=\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}=\dfrac{2(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$，求棒长的最大值，即求该函数的最小值. 设$\sin\theta+\cos\theta=t\,(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，则$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$，$y=\dfrac{2t}{\frac{t^2-1}{2}}=\dfrac{4}{t-\frac{1}{t}}\,(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$.

注意到$y=\dfrac{4}{t-\frac{1}{t}}$在区间$[1,\ \sqrt{2}]$上为减函数，可知当$t=\sqrt{2}$时，$y$取得取小值$4\sqrt{2}$ m.

所以棒长的最大值$L_{\max}=4\sqrt{2}$ m.

17. 由$\dfrac{17}{12}\pi<x<\dfrac{7}{4}\pi$，得$\dfrac{5}{3}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi$，

所以$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{5}$，$\cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

所以$\sin x=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，$\tan x=7$，$\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{7}{25}$.

所以$\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=\dfrac{\frac{7}{25}+2\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2}{1-7}=-\dfrac{28}{75}$.

18. 因为$f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 当$x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}\right]$，$f(x)$的值域为$[-\sqrt{3},\ 2]$.

(2) 由$f(B)=2\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，知$B=\dfrac{\pi}{4}$，$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=1$.

19. (1) 由已知条件得$2\sin(A+C)\left(2\cos^2\dfrac{B}{2}-1\right)=\sqrt{3}\cos 2B$，即$2\sin B\cos B=\sqrt{3}\cos 2B$，

即 $\sin 2B=\sqrt{3}\cos 2B$，$\tan 2B=\sqrt{3}$，所以 $2B=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$.

（2）$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-\sqrt{3}ac=1^2$，$\therefore a^2+c^2=1+\sqrt{3}ac\geqslant 2ac$，$ac\leqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

故 $S=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. 所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

20. 因为$\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3}, 1)$，$\overrightarrow{QP}=(\sqrt{3}-\cos x, 1-\sin x)$.

（1）$f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}=(\sqrt{3}, 1)\cdot(\sqrt{3}-\cos x, 1-\sin x)=3-\sqrt{3}\cos x+1-\sin x=-\sin x-\sqrt{3}\cos x+4=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4$，最小正周期 $T=2\pi$.

（2）由 $f(A)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+4=4$，得 $A=\frac{2\pi}{3}$.

由于 $BC=3$，由正弦定理得 $AC=2\sqrt{3}\sin B$，$AB=2\sqrt{3}\sin C$.

所以 $BC+AC+AB=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C=3+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)\leqslant 3+2\sqrt{3}$，当且仅当 $B=\frac{\pi}{6}$时等号成立. 故$\triangle ABC$ 周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$.

21.（1）$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

（2）略

22. 图(1)中，阴影部分面积为菱形面积：$2\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$.

图(2)中，阴影部分面积为 2 个矩形面积的和：$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

两图阴影部分面积相等，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

23. 本题是探究活动，不要求学生单独做，可以组织学生合作，通过自己动手推导或查询相关资料得出推导过程即可，目的是发散学生的思维，开阔知识视野. 此处只提供两角和的余弦公式的推导.

在单位圆内作角$-\beta$，终边交单位圆于 P_2 点，设单位圆与 x 轴交于点 P_1，则

$P_1(1, 0)$，$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$Q(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$，$P_2(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$.

因为$\angle P_1OQ=\angle POP_2=\alpha+\beta$，且$|OP_1|=|OP|=|OQ|=|OP_2|=1$，

所以$\triangle P_1OQ\cong\triangle POP_2$，$|P_1Q|=|P_2P|$.

又由勾股定理可得$|P_1Q|=\sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+[\sin(\alpha+\beta)-0]^2}$，

$|P_2P|=\sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2}$，

故$\sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+[\sin(\alpha+\beta)-0]^2}=\sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2}$.

化简，得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

第3章

复　数

平方得负岂荒唐？

左转两番朝后方．

加减乘除依旧算，

方程有解没商量．

Ⅰ. 全章整体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

复数的内容在《数学课标(2017 年版)》中是必修“主题三几何与代数”的第二个单元，出现在“平面向量及其应用”之后. 复数的有关内容，最突出的变化是从选修调到了必修，而且增加了“复数的三角形式”这一内容，但是为选学内容.

复数是一类重要的运算对象，有广泛的应用. 本章通过方程求解，帮助学生理解引入复数的必要性，了解复数系的扩充过程；掌握复数的表示、运算及其几何意义，体会数系扩充过程中理性思维的作用. 本章特别注重复数表示和运算的几何意义，强调形与数的融合. 学生通过本章学习，可以提升数学运算、直观想象和逻辑推理等素养.

2. 学习目标

(1) 复数的概念

①通过方程的解，认识复数；

②理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义.

(2) 复数的运算

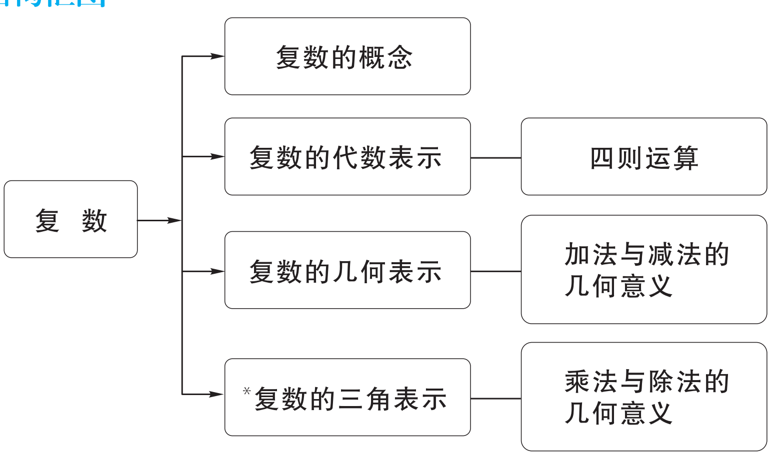
掌握复数代数表示式的四则运算，了解复数加、减运算的几何意义.

(3) 复数的三角表示

通过复数的几何意义，了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章内容主要是为了落实课标中“主题三几何与代数”而编写的，课标的教学提示中要求“在复数的教学中，应注重对复数的表示及几何意义的理解，避免烦琐的计算与技巧训练．对于学有余力的学生，可以安排一些引申内容，如复数的三角表示等．可以适当融入数学文化，让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用．学业要求仅仅为“能够理解复数的概念，掌握复数代数表示式的四则运算”，可见课标对本章内容的要求较低．但教师在教学中应当控制难度，并加强理性思维的训练．教材编写的主线是通过数系扩充得到复数的概念，再研究复数的运算及其几何意义，涉及数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养．

复数的引入是数系的又一次扩充，也是中学阶段数系的最后一次扩充．在义务教育阶段，学生经历了将数从自然数逐步扩充到实数的过程，但考虑到学生当时的认知基础和认知能力，并未强调扩充的一些“规则”，因而他们对数系扩充“规则”不甚了解．因此，本章应引导学生类比从有理数系扩充到实数系的过程和方法，从使得方程 $x^2+1=0$ 有解的想法出发，利用这些“规则”，对实数系进行进一步扩充，引入复数及其四则运算，将实数系扩充到复数系．

本章内容共分 4 节：复数的概念、复数的四则运算、复数的几何表示、复数的三角表示．

本章的重点是：数的扩充过程，复数的代数形式及其几何意义，复数的加、减、乘、除四则运算，复数加、减运算的几何意义．“复数的概念”从解方程的角度引出数的扩充的必要性，并引入虚数单位 i，进而类比由有理数扩充到实数的过程，将实数扩充到复数．由于数通常包括两个要素，一是具体数，二是数的运算及运算律，因而复数的引入是本章的一个难点．借助从有理数系扩充到实数系的经验，理解扩充过程中体现的“规则”，在这些“规则”的引导下认识从实数系到复数系的扩充，是突破这个难点的关键．“复数的四则运算”讨论复数集中的四则运算问题，即研究复数的加、减、乘、除运算，其中加法、乘法运算是核心，减法、除法运算分别是它们的逆运算．除此之外，还讨论了复数加法、减法、数乘运算的几何意义．复数本质上是一对有序实数，因此复数集与复平面内所有的点一一对应，与复平面内以原点为起点的向量组成的集合也是对应的，这就是复数的两种几何意义．从复数的向量表示出发，结合三角函数知识，得到复数的另一种重要表示形式——三角表示，进而研究复数乘、除运算的三角表示及其几何意义．复数乘、除运算的三角表示形式简洁，在很多情况下可以简化复数的乘、除运算；其几何意义就是平面向量的旋转、伸缩，因此利用它们可以方便地解决很多平面向量和平面几何问题．但鉴于《数学课标(2017 年版)》将其定位为选学内容，不作考试要求，因此不将它作为本章的教学重点．

三、课时安排建议

本章教学约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 复数的概念	1 课时
3.2 复数的四则运算	1 课时
3.3 复数的几何表示	1 课时
*3.4 复数的三角表示	2 课时
小结与复习	2 课时

Ⅱ. 教材内容分析与教学建议

3.1 复数的概念

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

1. 了解数系的扩充，明白各数系的关系.
2. 能区分虚数与纯虚数，理解两个复数相等的充要条件.

◆ 本节难点：

1. 通过方程的解认识复数.
2. 复数及其相关概念的理解.

二、教材编写意图

“数”的认识过程，是人类文明发展史的一部分，在数学史上，虚数以及复数概念的引入经历了一个曲折的过程. 让学生在了解这一过程中，感受数学家的想象力、创造力和不屈不挠、精益求精的精神，从而加深对数的扩充的必要性的体会，明白数系的扩充，一方面是解决人类生活生产实际问题的需要，另一方面也是解决数学自身发展所遇到矛盾的需要.

本节复数的概念从解方程的角度引发数系扩充的必要性，并引入虚数单位 i. 定义了虚数单位后，需要定义实数与虚数单位之间的运算，定义的运算还需保持原来实数运算所满足的运算律. 本节内容还给出了实部和虚部的符号表示，研究了复数的分类、复数的相等与不相等. 本节是整章的基础知识，具有奠基性作用，侧重提升学生的逻辑推理、直观想象素养.

本节引言与章引言一脉相承，从“实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，它在实数范围内没有实数根”出发，引出数系扩充问题：能否类比从有理数集扩充到实数集的过程，通过引入“新”数，将实数集进行扩充，使得方程在扩充后的数集中有解. 这里主要为实数集进一步扩充的必要性以及扩充的基本思路做铺垫.

三、教学建议

遵循课标要求，本节的情境与问题是从方程的解的角度来切入的. 教学时应认真梳理已学的从自然数逐步扩充到实数的过程与方法，如下图所示.

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{自然数集 }\mathbf{N} & \xrightarrow[\text{负整数}]{\text{引入}} & \text{整数集 }\mathbf{Z} & \xrightarrow[\text{分数}]{\text{引入}} & \text{有理数集 }\mathbf{Q} & \xrightarrow[\text{无理数}]{\text{引入}} & \text{实数集 }\mathbf{R} \\
+ & & + & & + & & + \\
\times & & \times & & \times & & \times
\end{array}$$

特别要注重梳理从有理数系扩充到实数系时体现的“规则”，即数集扩充后，在实数集中规定的加法、乘法运算，与原来在有理数集中规定的加法、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律，进而类比这一扩充过程和方法，从使方程 $x^2+1=0$ 有解的想法出发，认真思考怎样利用这些“规则”，对实数系进行进一步扩充.

1. 认识复数

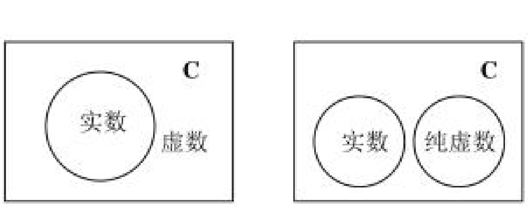
首先，初步理解从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2+a=0(a>0)$ 有没有解，进而可以归结为方程 $x^2+1=0$ 有没有解. 实际上，若 $a>0$，则 $-a<0$，根据平方根的定义，求负数 $-a$ 的平方根即为：是否存在数 x，使得 $x^2=-a$. 因此，负实数 $-a$ 能不能开平方，等价于方程 $x^2+a=0$ $(a>0)$ 有没有解，若令 $y=\dfrac{x}{\sqrt{a}}$，则方程 $x^2+a=0$ 转化为 $y^2+1=0$，因此可归结为方程 $x^2+1=0$ 有没有解.

其次，对实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(\Delta=b^2-4ac<0)$ 变形得 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，进而可以将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(\Delta=b^2-4ac<0)$ 有没有解，化归为方程 $x^2+1=0$ 有没有解.

本节引入虚数单位 i，由于 i 是学生刚接触的新的符号，教师应该适当给学生留出记忆时间，这里要提醒学生注意，规定 $\mathrm{i}^2=-1$，但 -1 有两个平方根，即 i 和 $-$i，而 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$. 还需提醒学生，以后不再使用类似 $\sqrt{-1}$ 这样的表达形式，在 $\sqrt{a}$ 中，还是要求 $a\geqslant 0$.

同时需要指出的是，在引入复数集的教学中，应认清此处的主要目标是得出复数集包含的所有数，以准确把握教学要求. 即主要进行的是 i 和实数之间的加法、乘法运算，并且大多是形式上的运算. 例如，把实数 a 与新引入的数 i 相加，结果记作 $a+\mathrm{i}$；把实数 b 与 i 相乘，结果记作 $b\mathrm{i}$；把实数 a 与实数 b 和 i 相乘的结果相加，结果记作 $a+b\mathrm{i}$ 等. 这里还需要注意，$a+\mathrm{i}$ 可以看作是 $a+1\times\mathrm{i}$，$b\mathrm{i}$ 可以看作是 $0+b\times\mathrm{i}$，a 可以看作是 $a+0\times\mathrm{i}$，i 可以看作是 $0+1\times\mathrm{i}$. 对于形如 $a+b\mathrm{i}(b\neq 0)$ 之间的加法和乘法运算，此处不宜深究，待后续讨论复数的运算时，再研究这些运算的封闭性以及运算律.

定义了复数后，可以类比实数来研究复数. 在此特别要提醒学生注意复数与实数的联系与区别，复数集用大写字母 **C** 表示，取自英文单词“complex”的首字母，这里可提问学生：实数集 **R** 与复数集 **C** 的关系是什么？实数集由所有虚部为 0 的复数组成，**R** 是 **C** 的真子集，虚数集与实数集没有交集，并集为复数集，而纯虚数集是虚数集的真子集，它是由实部为 0 的虚数构成，由此进一步引出复数的分类. 全集 **C** 为复数集，用韦恩图表示复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系如下图所示：



2. 两个复数相等

引入新对象后，为了保证对象的确定性，就要明确两个元素相等的含义(定义).

教材采用直接规定的方式给出两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）相等的充要条件，实际上

也可以看成是两个复数相等的定义，由此可以得到一个重要特例，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，$a+bi=0$ 当且仅当 $a=0$ 且 $b=0$.

教学中还应使学生明确，这里不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求某些复数值的依据. 即利用复数相等的含义，可以得到关于实数 a，b 的方程(组)，通过解方程(组)得到 a，b 的值.

由两个复数相等的定义，可以把复数看成一个有序实数对，从而为复数的几何意义的学习奠定基础.

3. 复数的大小关系

教材 P. 102 提到两个复数不全是实数时，只能说相等或不相等，不能比较大小，但教材没有说明缘由，学生也不需明白原因，但教师心里应清楚理由. 教师要认清上述结论，要区分“序关系”和“大小关系”这两个概念，我们所说的数的大小关系是一种序，但数系中序关系通常不一定能成为大小关系，实际上数系中规定的序关系(可查阅高等数学抽象代数相关知识)“$<$”(或“$>$”)，除了满足一般序关系的传递性外，还要满足如下三个条件：

(1) 对数系中的任意两个数 a，b，$a<b$，$a=b$，$b<a$ 有且只有其中之一成立；

(2) 对数系中的任意三个数 a，b，c，如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

(3) 对数系中的任意三个数 a，b，$c(c>0)$，如果 $a<b$，那么 $ac<bc$，

上述条件只有满足序关系才能成为大小关系.

从抽象代数的角度看，对环(或域)而言，偏序集乃至全序集(可查阅高等数学抽象代数相关知识)不一定是有序环(或有序域).

例如，整数系、有理数系、实数系对我们熟知的序关系是有序环(或有序域)(可查阅高等数学域论相关知识)，但在复数系中，尽管我们可以定义出不少“很合理的”序，但每种序都不能成为大小关系，即复数系不是有序域. 例如，我们可以在复数系中定义字典序，即

$$a+bi<c+di(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R})\Leftrightarrow a<c,\ 或\ a=c\ 且\ b<d.$$

这个序有很好的性质，它使得复数集成为全序集，而且与实数系中大小关系相容，但容易证明它不是大小关系.

4. 例题的教学分析

例 1 应熟知一个复数可由其实部和虚部完全确定. 对实部与虚部的理解，是为后续研究复数的几何意义奠定基础. 实部和虚部是易错的概念，这里要强调实部 a 和虚部 b 都是实数，虚部不是 bi. 可以让学生自己给出一个复数，并说出其实部与虚部.

例 2 是一道复习巩固复数概念的题目，首先要在变化中认识复数代数形式的结构，正确判断数的实部、虚部，本例中复数 z 的实部为 m^2+m-2，虚部为 m^2-1；然后，依据复数是实数、虚数、纯虚数的条件，列方程(或不等式)求出相应的 m 的取值.

求解(3)时学生容易忽略“纯虚数的虚部不等于 0”这个条件. 应强调纯虚数是一种特殊的虚数，即实部为 0 的虚数，但其首先应满足虚数的条件，即虚部不等于 0. 这里应强调，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，①$z=a+bi$ 是实数$\Leftrightarrow b=0$；②$z=a+bi$ 是虚数$\Leftrightarrow b\neq0$；③$z=a+bi$ 是纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0$.

例 3 要求熟练掌握复数相等的概念. 教材给出的 $a+bi=c+di(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R})$的条件是解决复数相等问题的关键.

★补充例题

例 1 给出以下命题：①复数由实数、虚数、纯虚数构成；②形如 $a+bi$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$的数一定是虚

数；③两个复数不能比较大小；④若 $a\in\mathbf{C}$，则 $(a+3)\mathrm{i}$ 是纯虚数. 其中正确命题的个数是________.

解： 复数由实数和虚数组成，虚数中包含纯虚数，故①错；形如 $a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 的数不一定是虚数，也可能是实数，故②错；两个复数并非不可以比较大小，当两个复数都是实数时就可以比较大小，故③错；当 $a=-3$ 时，$(a+3)\mathrm{i}=0$，不是纯虚数，故④错. 因此正确命题的个数为 0.

说明： 通过命题真假的判断，可以让学生进一步熟练基本概念. 判断命题的正确性时，需通过逻辑推理加以证明，但否定一个命题的正确性时，只需举一个反例即可，所以解答这类题时，可按照“先特殊，后一般，先否定，后肯定”的方法.

例 2 若 m 为实数，$z_1=m^2+1+(m^3+3m^2+2m)\mathrm{i}$，$z_2=4m+2+(m^3-5m^2+4m)\mathrm{i}$，那么使 $z_1>z_2$ 的 m 值的集合是什么？使 $z_1<z_2$ 的 m 值的集合又是什么？

解： 由于 $z_1>z_2$，则 z_1，z_2 必须均为实数.

当 $z_1\in\mathbf{R}$ 时，由 $m^3+3m^2+2m=0$，

得 $m=0$，-1，-2，此时 $z_1=1$ 或 2 或 5.

当 $z_2\in\mathbf{R}$ 时，由 $m^3-5m^2+4m=0$，

得 $m=0$，1，4，此时 $z_2=2$ 或 6 或 18.

上面 m 的公共值为 $m=0$.

此时 z_1 与 z_2 同为实数，且 $z_1=1$，$z_2=2$.

所以使 $z_1>z_2$ 的 m 值的集合为空集，使 $z_1<z_2$ 的 m 值的集合为 $\{0\}$.

说明： 当且仅当两个复数都是实数时才能比较大小，本题实际上可以转化为两个复数虚部都为 0 的情形，但应注意两者要同时满足，故应取相同的 m 值.

5. 相关链接

复数的产生与发展

最早有关复数方根的文献出自希腊数学家海伦，他考虑的是平顶金字塔不可能问题. 给出“虚数”这一名称的是法国数学家笛卡儿（1596—1650），他在《几何学》中使“虚的数”与“实的数”相对应，从此，虚数才流传开来.

数系中发现一颗新星——虚数，引起了数学界的一片困惑，很多数学家都不承认虚数. 经过许多数学家长期不懈的努力，深刻探讨并发展了复数理论，才使得在数学领域游荡了 200 年的虚数揭开神秘的面纱，原来虚数不“虚”. 虚数成了数系大家庭中的一员，从而实数集扩充到了复数集.

随着科学和技术的进步，复数理论越来越凸显出它的重要性，它不但对于数学本身的发展有着极其重要的意义，而且为证明机翼上升力的基本定理起到了重要作用，并在解决堤坝渗水的问题中显示了它的威力，也为建立巨大水电站提供了重要的理论依据. 古时候，人们便能够解二次甚至某些高次方程，然而一个其貌不扬的二次方程 $x^2+1=0$ 却使得数学家狼狈不堪. 难道存在平方为 -1 的数吗？经过长期的犹豫、徘徊，到了 16 世纪，一些勇敢的数学家做出了大胆选择：引进虚数单位，从而建立了一个复数系.

当然，也有不少人试图探索建立复数及其运算的几何意义，但真正开始领悟到复数与平面上点之间的关系的是维塞尔、阿甘德以及高斯. 18 世纪末，维塞尔在坐标平面上引入虚轴，以实轴和虚轴所确定的平面向量表示复数，并且还用几何术语定义了复数和向量的运算. 19 世纪初，阿甘德将复数表示成三角形式，并且把它与平面上线段的旋转联系起来. 高斯在证明代数基本定理时，应用了复数，还创立了高斯平面，从而复数与复平面建立起了一一对应，并首次引入“复数”这一名称. 他们的工作主要是建

立了复数的直观基础.

到了18世纪，复数理论已经比较成熟，人们很自然地想到了这样的问题：复数系还可能进行扩张吗？是否可以找到一个可以真包含复数系的“数系”，它承袭了复数系的运算和运算律？也就是说，我们能否进一步构造一个包含复数系的新的数系，且使原来的运算性质全部保留下来？一个很自然的想法是考察一元复系数高次方程的解，如果我们能够找到一个复系数方程，它在复数范围内没有解，就有可能得到一个复数系的扩张系.

但18世纪末高斯证明的“代数基本定理”(即任意 n 次复系数方程至少有一个复数根)明确宣告了“此路不通”. 于是不屈不挠的数学家们不得不寻求新的途径. 由于复平面上的点和复数一一对应，故任意复数都可以表示为一组有序实数对，实数可以看作数对$(a, 0)$，因此有人把复数叫作“二元数”. 那么寻求新数系的一个自然途径便是设法建立“三元数系”，“三元数系”应当承袭复数系的运算和运算律，复数系可以看作是三元数系的子数系.

然而，数学家的辛勤努力并未给他们带来预期的成果. 数以千计的失败经历给他们带来了意外的收获：他们终于敢于设想，三元数系可能是不存在的；同时，为了建立新的“多元数系”，可能不得不放弃某些运算性质. 新的多元数系——“四元数系”的发现者是英国数学家哈密顿. “四元数”的出现宣告了传统观念下数系扩张的结束. 但四元数的发明，其意义远不止获得了新的数系. 它使数学家们认识到既然可以抛弃实数和复数的交换性去构造一个有意义、有作用的新“数系”，那么就可以考虑偏离实数和复数的通常性质去开拓新的数学领域. 虽然数系的扩张就此终止，但是，通向抽象代数的大门被打开了.

3.2 复数的四则运算

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则及其运算.

◆ 本节难点：

复数减法、除法的运算法则.

二、教材编写意图

引入一类代数对象，就要研究它的运算. 本节主要讨论复数的加法、乘法运算，并从它们的逆运算角度给出复数减法、除法的运算法则.

本节内容侧重类比思想的应用. 教材中复数的加法、乘法法则是直接规定的，在复数集中规定的加法运算、乘法运算，与实数集中规定的加法运算、乘法运算相一致. 类比实数的减法、除法运算，规定复数的减法是加法的逆运算，复数的除法是乘法的逆运算. 复数的乘法在计算过程中按照多项式乘法的方式进行，以前学生熟练掌握的代数公式和计算规律都是适用的.

三、教学建议

1. 复数的加减法

复数的加法法则是直接规定的，教学中可以引导学生结合引入复数集的过程，即在将实数集扩充到复数集时，希望数集扩充后，在复数集中规定的加法运算、乘法运算，与实数集中规定的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律，自主探索如何“合理地”规定复数的加法法则. 具体为：

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a, b, c, d\in\mathbf{R})$是任意两个复数，希望加法结合律成立，即 $z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b\mathrm{i}+d\mathrm{i})$. 进一步希望乘法对加法满足分配律，即 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$，这样就猜想出复数的加法法则. 当 $b=0$，$d=0$ 时，复数的加法法则与实数的加法法则一致，说明复数系与实数系中加法运算协调一致.

通过上述过程，就能使学生较为充分地体会为什么如此规定复数的加法法则，以及法则的合理性.

引入复数的加法法则后，应引导学生与多项式的加法进行类比，以发现两者的共性. 教学时，可以引导学生把复数 $a+b\mathrm{i}$ 中实部 a 和虚部 b 看作常数，i 看作“变元”，从而将复数 $a+b\mathrm{i}$ 看成是“一次二项式”，进而可以得到两个复数相加与两个多项式相加类似，都可以看成是“合并同类项”，因此，复数的加法法则不需要死记硬背.

(1) 复数加法的交换律、结合律的证明，教学时可以让学生自己动手推导.

(2) 在复数减法的教学中，首先应类比实数的减法，规定复数的减法是加法的逆运算，即用两个复数的加法定义两者的差，然后依据复数的加法、复数相等的定义，通过解实系数方程，得到复数的减法法则. 教学中可提醒学生，这里实际上使用的是待定系数法，它也是确定复数的一般方法. 两个复数的

差仍然是复数，但两个虚数的差不一定是虚数，可以让学生举例说明.

2. 复数的乘法与乘方

与复数的加法法则类似，应引导学生结合引入复数集的过程，在希望保持运算律的指引下自主探索如何“合理地”规定复数的乘法法则. 鉴于复数的乘法法则的形式较为复杂，因此，在引入复数的乘法法则后，更应引导学生加强与多项式的乘法进行类比，发现两者的共性和差异. 具体地，将复数 $a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$看成是关于 i 的“一次二项式”，将复数的乘法按多项式的乘法进行，只要在所得的结果中把 i^2 换成-1，并且把实部与虚部分别合并即可. 因此，没有必要专门记忆复数乘法的法则.

复数的乘法满足交换律、结合律，乘法对加法满足分配律. 教学中可以根据学生的实际情况，要求他们证明部分或全部运算律，下面仅给出乘法交换律的证明：

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，其中 a_1，b_1，a_2，$b_2\in\mathbf{R}$.

因为 $z_1z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i}$，

$z_2z_1=(a_2+b_2\mathrm{i})(a_1+b_1\mathrm{i})=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)\mathrm{i}$，

又 $a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1$，$a_1b_2+b_1a_2=a_2b_1+b_2a_1$，

所以 $z_1z_2=z_2z_1$.

由于复数乘法运算满足交换律和结合律，在两个复数乘积的基础上可以定义多个复数的乘积，进而定义其特殊情况——复数的乘方 z^n. 不难得到正整数次幂的乘方运算满足教材中给出的运算法则，但是，对于复数而言，也仅仅是正整数次幂的乘方运算满足这些运算法则.

3. 复数的除法运算

教材 P. 106 给出了复数除法的计算方法是“分母实数化”，即将分母的复数转化为实数，需用到共轭复数乘积为实数的结论，由于还没有学习共轭复数，因此在这里不必特别说明.

教学时可以引导学生类比根式的除法，得到简便操作方法：先把两个复数相除写成“分数”形式，再把分子与分母同乘分母的共轭复数，使分母实数化，最后再化简. 实际上，这种方法是进行复数除法运算的通法，依此进行复数除法运算，既简洁又不需要记忆烦琐的除法法则.

教学中还可以引导学生联系复数减法法则的引入过程，规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}(a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y\in\mathbf{R}，且\ c+d\mathrm{i}\neq 0) \qquad ①$$

的复数 $x+y\mathrm{i}$，叫作复数 $a+b\mathrm{i}$ 除以复数 $c+d\mathrm{i}$ 的商.

由①计算，可得 $cx-dy=a$，$cy+dx=b$.

由此，得 $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$，$y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

于是$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}，且\ c+d\mathrm{i}\neq 0)$.

4. 例题的教学分析

例 1 是复数加减法运算公式的简单应用，只需对实部和虚部分别进行计算，教学时可以补充一道加减法混合运算题，并说明复数混合运算的规律与合并同类项类似.

例 2 是复数的乘法与乘方运算法则的运用，按照多项式乘法的方式进行乘法运算，其中多项式运算中的代数公式(如平方差公式、完全平方公式)也适用于复数的乘法. 这个过程将新知识与原有知识建立联系，帮助学生快速地掌握运算技巧.

例 3 是复数除法运算法则的熟练与运用. $\dfrac{1}{z_2}$应理解为复数 z_2 的倒数，应放手让学生自己去体验计

算过程. $\frac{z_1}{z_2}$的计算既可以仿照复数除法运算公式的推导进行，也可以借用$\frac{1}{z_2}$的结论，将$\frac{z_1}{z_2}$看作是 z_1 和 $\frac{1}{z_2}$的乘积，用复数乘法运算公式进行计算.

例 4 本题的解题过程可以推广到一般，即可得到实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根为 $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，对 Δ 的符号进行分类即可得到根的情况. 提醒学生注意虚根一定是成对出现的，利用求根公式容易证明韦达定理仍然成立.

需要指出的是，鉴于已有的复数基础，例 4 的解答过程并不严密，教材实际上默认了一元二次方程 $x^2+3=0$ 及其一般形式 $x^2+a=0(a>0)$的根不能超过两个这个直观事实. 要在复数范围内严密地解方程 $x^2+a=0(a>0)$，进而严密地解实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，需要利用复数三角表示中的棣莫弗定理. 教材在复数的三角表示后面的 P. 121 设置了“多知道一点”栏目——“复数的方根”，以弥补这一不足.

★补充例题

例 1 计算：(1) $(-7\mathrm{i}+5)-(9-8\mathrm{i})+(3-2\mathrm{i})$；

(2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(2-\mathrm{i})-\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$.

解：(1) $(-7\mathrm{i}+5)-(9-8\mathrm{i})+(3-2\mathrm{i})=(5-9+3)+(-7+8-2)\mathrm{i}=-1-\mathrm{i}$.

(2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(2-\mathrm{i})-\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\left(\frac{1}{3}+2-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}\right)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.

说明：通过本例题熟悉复数的加减混合运算，进行复数混合运算时，可以类比多项式的运算：若有括号，括号优先；若无括号，可以从左到右依次进行计算.

例 2 求 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2\,021}$的值.

解：$\because \mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n+1}+\mathrm{i}^{4n+2}+\mathrm{i}^{4n+3}=1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}=0$，

$$\begin{aligned}\therefore 1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2\,021}&=(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3)+(\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^6+\mathrm{i}^7)+\cdots+(\mathrm{i}^{2\,016}+\mathrm{i}^{2\,017}+\mathrm{i}^{2\,018}+\mathrm{i}^{2\,019})+\mathrm{i}^{2\,020}+\mathrm{i}^{2\,021}\\&=0+\mathrm{i}^{4\times505}+\mathrm{i}^{4\times505+1}=1+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

说明：本例题是复数的乘方与复数加法的混合运算，通过本题可以帮助学生进一步掌握 i^n 的性质：对任意 $n\in\mathbf{N}$，$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n}=1$.

5. 相关链接

复数的开方

我们已经研究了复数的加、减、乘、除、乘方运算，并且给出了相应的几何意义，那么复数的开方运算如何实施呢?

为了探究这一问题，我们先求复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根.

解：设 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根为 $\omega=x+y\mathrm{i}(x, y\in\mathbf{R})$，

则
$$(x+y\mathrm{i})^2=1+\sqrt{3}\mathrm{i},$$
即
$$x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$
由此可得
$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\2xy=\sqrt{3}.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\\ y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\\ y_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

故 $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的平方根为

$$\omega_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}，\omega_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

上述解法解决了求一个复数的平方根问题，能用同样的方法求一个复数的立方根，4 次方根，…，n 次方根吗?

例如，求复数 $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的立方根.

解：设 $\omega=x+y\mathrm{i}(x，y\in\mathbf{R})$ 为 $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的立方根，则

$$(x+y\mathrm{i})^3=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

化简，得 $(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$

由此可得
$$\begin{cases}x^3-3xy^2=1,\\ 3x^2y-y^3=\sqrt{3}.\end{cases}$$

由该方程组求出 x，y 比较困难，可见用这种解法求一个复数的立方根，4 次方根，…，n 次方根比较困难.

由上可知，要求复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$ 的 n 次方根，需另谋他法.

3.3 复数的几何表示

一、教学重点与难点

◆ 本节重点：

复数的模与共轭复数，复数的几何意义.

◆ 本节难点：

复数的几何意义及复数加减法的几何意义.

二、教材编写意图

意大利数学家卡尔丹提出虚数两百余年后，也就是直到 18 世纪，人们才给出了复数的几何解释. 正因为有了复数的几何意义，才使得复数变得更加真实，同时也建立了复数与平面几何之间的联系，使复数成为解决平面几何问题的一个有力工具.

本节将复数与有序实数、向量建立一一对应关系：$z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})\leftrightarrow$点 $Z(a,\ b)\leftrightarrow\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$，既阐明了复数的几何意义，又通过类比，使学生用复数对应的向量的模来理解复数的模的几何意义，用向量的加减法运算来理解复数的加减法运算的几何意义，这样编排，既突显了前后知识的紧密联系，又便于学生接受和理解.

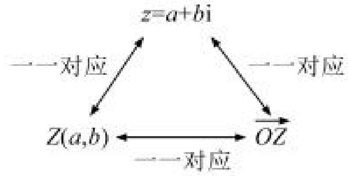
让学生在已学习了复数的代数形式、复数的加减运算的基础上学习本节知识，既能帮助学生理解已学知识，又能培养其数学几何直观素养.

三、教学建议

1. 复数的几何意义

本节的开篇引导学生类比实数的几何意义，思考复数的几何意义，自然地引出本节的主要研究内容. 接着引导学生从复数 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$本质上是一对有序实数对$(a,\ b)$出发，得到复数的一种几何表示方法：复数与复平面上的点一一对应，这是复数的一种几何意义.

由于复数 z 能与平面直角坐标系内的点 Z 建立一一对应关系，而平面直角坐标系内的点 Z 能唯一确定一个以原点 O 为始点，Z 为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$，从而复数与向量之间也可以建立一一对应关系，这就是复数的另一种几何意义. 这里需要注意，由于数学中研究的向量是自由向量，因而我们规定相等的向量表示同一个复数，进而从整体上认识复数的两种几何意义，即任意一个复数 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$与复平面内的一点 $Z(a,\ b)$对应，复平面内任意一点 $Z(a,\ b)$又与以原点为起点、点 $Z(a,\ b)$为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$对应. 这些对应都是一一对应，即



对于复平面，教学时应注意如下几点：

①复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$用复平面内的点 $Z(a, b)$表示，复平面内的点 Z 的坐标是(a, b)，而不是 $(a, b\mathrm{i})$，也就是说，复平面的纵坐标轴的单位长度是 1，而不是 i.

②不宜强调复平面与一般坐标平面的区别.

③对于虚轴，重在明晰它的意义，即在说明虚轴上的点表示的数时，需要指出除原点外都表示虚数，因为原点表示实数 0，不要在“y 轴叫作虚轴”“y 轴(去除原点)叫作虚轴”哪种定义更“合理”上纠结.

2. 复数的模与共轭复数

由于复数与以原点为起点的平面向量是一一对应的，因而用复数对应的向量的模定义复数的模非常合理. 同时，按照复数的模的定义，实数的模与实数的绝对值相等. 教学中应在这两方面对学生适当引导，帮助他们融会贯通复数的模的含义.

在讲授共轭复数的概念时，要提示学生从数和形两方面去理解，与复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$对应的点$Z(a, b)$关于实轴的对称点 $Z'(a, -b)$，其对应的复数是$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$. 注意实数的共轭复数是其自身，在讲解共轭复数的概念时，可以给学生补充下面的结论：

$$z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}.$$

教材 P. 111 右边“贴士”中提出问题：共轭复数的模一定相等吗？答案是一定，因为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与其共轭复数$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ 的模长都是$\sqrt{a^2+b^2}$.

3. 复数加减法的几何意义

由复数与向量之间的对应关系很容易得出复数加法的几何意义，从而复数的加法可以用向量的加法表示，向量的加法可以用复数的加法表示，这就为我们进行复数运算提供了几何方法. 教师还可以让学生用复数加法的几何意义来验证加法的交换律与结合律.

由复数与向量之间的对应关系，以及复数加法的几何意义，很容易得出复数减法的几何意义. 复数减法是加法的逆运算，两个复数的差 z_1-z_2 与连接它们对应向量终点的向量对应，并指向被减向量.

利用复数加减法的几何意义证明复数的绝对值不等式

$$\left||z_1|-|z_2|\right|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

这里要用到三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，还可以让学生去探究发现等号成立的条件.

复数与任一实数相乘，较容易类比向量的数乘运算进行理解，但要与两个复数的乘积加以区分. 复数的减法及实数与复数的积的几何意义的教学，应鼓励学生自己去探索，并让学生讲清自己是怎么想到的，巩固通过类比研究新问题的方法.

4. 例题的教学分析

例 1　回顾向量的模的知识，并通过本题进一步熟练复数和向量的对应关系，帮助学生掌握复数的模的概念.

本例题(3)小问要会利用复数对应的点的对称关系，写出复数之间的关系. 复数 $z_1=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$在复平面上对应的点为 Z_1，复数 z_2 在复平面上对应的点为 Z_2，若 Z_1，Z_2 关于实轴对称，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$；若 Z_1，Z_2 关于虚轴对称，则 $z_2=-a+b\mathrm{i}$；若 Z_1，Z_2 关于原点对称，则 $z_2=-a-b\mathrm{i}$. 三种对称情形中的两个向量的模都相等.

在讲授完例 1 后，可让学生进一步思考：能否再写出一个复数 z，使得 z 对应的向量$\overrightarrow{OZ}$与$\overrightarrow{OP_3}$的模相等，将不同学生写出的复数 z 写在黑板上，引导学生猜想并证明这些复数对应的点应符合的几何条件.

例 2 要求学生会利用复数的模的有关等式或不等式求复数对应的点的集合所表示的图形，知道圆的复数方程. 提醒学生注意数与形之间的转化，结合复数的模的定义理解何种情况下图形是圆，何种情况下图形是圆面或圆环，是否包含边界等问题.

例 3 证明了两个共轭复数的乘积等于其模的平方，也就是乘积的结果变成了一个实数. 这个结论可以联系复数的除法运算进行说明. 在证明过程中，还可以让学生观察、体验一些多项式计算公式的应用. 此处平方差公式仍然适用，只是由于 $i^2=-1$ 将公式中的“－”变成了“＋”.

这里也可以让学生推导$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，参考的证明方式如下：

$\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$，

所以$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

例 4 利用复数及其运算的几何意义研究复平面内的点对应的复数. 将复平面内两点 A，B 转化为对应的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，使得几何问题代数化，这是解决问题的关键.

复数加法、减法的几何意义与平面向量的平行四边形法则、三角形法则有关，因此在求解与平行四边形、三角形有关的复数问题时，主要应根据复数加、减运算的几何意义来求解计算.

还可结合本例题增加条件来研究四边形 $OACB$ 的形状，如：

在复平面内，z_1，z_2 对应的点分别为 A，B，z_1+z_2 对应的点为 C，O 为坐标原点，则

(1) 四边形 $OACB$ 为平行四边形；

(2) 若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则四边形 $OACB$ 为矩形；

(3) 若 $|z_1|=|z_2|$，则四边形 $OACB$ 为菱形；

(4) 若 $|z_1|=|z_2|$ 且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则四边形 $OACB$ 为正方形.

★补充例题

例 1 若 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，则复数 $z=\cos\theta+\sin\theta+(\sin\theta-\cos\theta)i$ 在复平面内所对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

解： $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$，$\theta-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

因此 $\cos\theta+\sin\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta>0$，

所以复数 z 在复平面内对应的点在第二象限. 故选 B.

说明： 通过本题进一步熟悉复数与平面直角坐标系中点的对应关系，即 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$ 与点 $Z(a,\ b)$ 一一对应，根据所给角 θ 的范围，确定复数 z 的实部与虚部的符号. 本题将三角函数知识与新学知识综合，对学生的能力要求更高，同时通过本题的解答，复习回顾了三角函数的相关知识.

例 2 复数 $z_1=1+2i$，$z_2=-2+i$，$z_3=-1-2i$，它们在复平面上的对应点是一个正方形的三个顶点，求这个正方形的第四个顶点对应的复数.

解：（方法一）设复数 z_1，z_2，z_3 所对应的点分别为 A，B，C，正方形的第四个顶点 D 对应的复数为 $x+yi(x,\ y\in\mathbf{R})$.

则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(x+y\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=(x-1)+(y-2)\mathrm{i}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1-2\mathrm{i})-(-2+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$.

因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以$(x-1)+(y-2)\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，所以$\begin{cases}x-1=1,\\ y-2=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$

故点 D 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

（方法二）设复数 z_1，z_2，z_3 所对应的点分别为 A，B，C，正方形的第四个顶点 D 对应的复数为 $x+y\mathrm{i}(x，y\in\mathbf{R})$.

因为点 A 与点 C 关于原点对称，

所以原点 O 为正方形的中心，

所以点 O 也是 BD 的中点，

于是$(-2+\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=0$，

所以 $x=2$，$y=-1$.

故点 D 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

说明：本例题是让学生进一步明白复数加减法运算可以通过向量运算来进行. 两种方法分别从数的运算和形的直观两个方面来研究，充分体现了数形结合思想在解答问题中的应用.

例 3　已知$|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{3}$，求$|z_1-z_2|$.

解：（方法一）设复数 z_1，z_2，z_1+z_2 在复平面上对应的点分别为 Z_1，Z_2，Z.

由题意知$|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|=1$，$|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{3}$.

在$\triangle OZ_1Z$ 中，由余弦定理得 $3=1+1-2\times1\times1\times\cos\angle OZ_1Z$，

即 $\cos\angle OZ_1Z=-\dfrac{1}{2}$，所以$\angle OZ_1Z=120^\circ$.

所以$\angle Z_2OZ_1=60^\circ$.

所以$\triangle Z_2OZ_1$ 是正三角形，故$|\overrightarrow{Z_2Z_1}|=1$，即$|z_1-z_2|=1$.

（方法二）设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a，b，c，d\in\mathbf{R})$.

由题设知 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$(a+c)^2+(b+d)^2=3$.

因为$(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$，

所以 $2(ac+bd)=1$.

又因为$|z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)=1+1-1=1$，

所以$|z_1-z_2|=1$.

说明：本例题旨在训练学生综合运用复数的模和复数的加减运算知识的能力. 本题既可以结合图形，将其转化为解三角形问题，用余弦定理求解，也可用代数运算求解.

5. 相关链接

一元多项式方程的根与系数

在代数发展史上的很长一段时间内，解一元多项式方程是人们研究的一个中心问题. 早在古巴比伦时期，人们就会解一元二次方程. 16 世纪上半叶，数学家们得到了一元三次方程、一元四次方程的解法（包括求根公式）. 此后，数学家们转向求解一元五次及五次以上的方程. 他们想弄清楚以下问题：一般的一元多项式方程有没有根？如果有根，根的个数是多少？是否存在求根公式？

我们可以发现这样一个现象：随机生成的一元多项式，在复数集中最终都可以分解成一次因式的乘积，且一次因式的个数(包括重复因式)就是被分解的多项式的次数. 事实上，数学中有如下定理：

代数基本定理：任何一元 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次复系数多项式方程 $f(x)=0$ 至少有一个复数根.

代数基本定理是数学中很重要的定理之一，它在代数学中起着基础作用. 代数基本定理的证明方法涉及高等数学知识，此处不作介绍. 有兴趣的可以查阅相关资料.

由代数基本定理可以得到：任何一元 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次复系数多项式 $f(x)$ 在复数集中可以分解为 n 个一次因式的乘积. 进而，一元 n 次多项式方程有 n 个复数根(重根按重数计). 你能给出证明吗?

尽管一元 n 次多项式方程有 n 个复数根(重根按重数计)，但是一元五次及五次以上的方程不存在一般的求根公式. 下面我们从代数基本定理出发，看看一元多项式方程的根与系数之间的关系.

设实系数一元二次方程 $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根为 x_1，x_2，容易得到

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{a_1}{a_2},\\x_1x_2=\dfrac{a_0}{a_2}.\end{cases}$$

设实系数一元三次方程

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad ①$$

在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根为 x_1，x_2，x_3，可以得到，方程①可变形为

$$a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0,$$

展开得

$$a_3x^3-a_3(x_1+x_2+x_3)x^2+a_3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-a_3x_1x_2x_3=0. \qquad ②$$

比较①②可以得到

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_2}{a_3},\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_1}{a_3},\\x_1x_2x_3=-\dfrac{a_0}{a_3}.\end{cases}$$

如果实系数一元四次方程 $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根为 x_1，x_2，x_3，x_4，那么它们与方程的系数之间有什么关系呢?

对于上述方程，如果系数是复数，那么与系数的这些关系仍然成立吗?

*3.4　复数的三角表示

一、教学重点与难点

◆ **本节重点：**

复数的三角表示式，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

◆ **本节难点：**

$i^2=-1$ 的几何意义及复数的三角表示.

二、教材编写意图

“复数的三角表示”是本版教材新增加的内容，这部分内容在课标中用“＊”标注，是选学内容. 复数的三角表示是复数的一种重要表示形式，它沟通了复数与平面向量、三角函数等数学分支之间的联系，可以帮助我们进一步认识复数，为解决平面向量、三角函数和一些平面几何问题提供一种重要途径，也为今后在大学期间进一步学习复数的指数形式、复变函数论、解析数论等高等数学知识奠定一定基础. 可见本节知识起着承前启后的作用. 由于复数的三角表示与复数的向量表示、三角函数有很强的关联性，其形式也比较复杂，因而复数的三角表示是本节的教学难点. 本节的学习应侧重提升学生的直观想象、逻辑推理和数学运算素养.

三、教学建议

1. $i^2=-1$ 的几何意义

用平面向量来表示复数，使复数有了几何意义，我们已经知道复数加减运算的几何意义，但还不知道复数乘法的几何意义，因此还不知道 $i^2=-1$ 有什么意义.

要解释 $i^2=-1$，教材先解释了 $(-1)^2=1$ 的几何意义：乘 -1 就是向后转，乘 $(-1)^2$ 就是后转两次，转回原来的方向，相当于不转.

既然 -1 的平方是后转两次，转两个 $180°$，-1 的平方根就应该后转半次，转半个 $180°$，即转 $90°$. 旋转 $90°$有两个不同方向，逆时针方向为 $+90°$，顺时针方向为 $-90°$. 我们将转 $+90°$记为 i，转 $-90°$就是 $-i$. i^2，$(-i)^2$ 分别是 $+180°$与 $-180°$，都是向后转. 虽然转的过程不同，但旋转结束之后都是面对同样方向，都是乘 -1，因此 $i^2=(-i)^2=-1$，$\pm i$ 是 -1 的两个不同的平方根.

教学时可结合生活常识理解，沿逆时针方向旋转 $90°$，俗话说就是“向左转”. “左转再左转，等于向后转”，就是 $i^2=-1$. 诗句“平方得负岂荒唐，左转两番朝后方”说的也正是这个意思. 当然，“右转两番朝后方”也是对的，这就是说 $i^2=-1$，-1 有两个平方根 $\pm i$.

教材采用先猜后验证的方法对培养学生思维的广阔性、深刻性大有裨益，也体现了数学学习的科学性与严谨性.

2. 旋转任意角

复数通过几何表示，把复数与平面内的点及从原点出发的向量建立起一一对应后，复数不仅有了实

际的解释，而且逐步展示了它的应用. 我们已经知道，把复数 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$旋转 $90°$和 $180°$，相当于将复数 z 分别乘 i 和 -1，学生自然会想，如果将向量$\overrightarrow{OP}$旋转任意角度，又是用哪个复数乘 z 呢?

为方便学生理解，可以先提出这样的问题：将平面上坐标为$(x，y)$的点 P，绕原点沿逆时针方向旋转 α 角变成点 P'，求点 P'的坐标. 进而根据几何知识来辅助说明点 P'的坐标与旋转角的关系，然后再写出相应的复数，这样较容易理解.

此内容是复数三角形式的基础，也是教学的难点，讲解时要学生主动探究，弄清楚旋转前后坐标与旋转角 α 的关系，特别强调其几何意义：模长不变，辐角变为原来复数的辐角加上旋转角 α.

3. 复数的三角表示

在前面的学习中，学生已经知道任意复数 $z=a+bi(a，b\in\mathbf{R})$与复平面内的向量$\overrightarrow{OP}$一一对应，向量$\overrightarrow{OP}=(a，b)$的大小可以用模 $r(r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0)$表示，但从什么角度刻画向量的方向，需要教师引导学生借助给出的图形共同解决，得出可以借助以 x 轴的非负半轴为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$所在的射线 OP 为终边的角 θ 来刻画$\overrightarrow{OP}$的方向，从而引出辐角的定义.

对于辐角，要明确两点：一是它的意义，即 θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，向量$\overrightarrow{OP}$所在射线 OP 为终边的角；二是它的多值性和“周期性”，即任意一个不为零的复数，其辐角的值有无数多个，且这些辐角的值相差 2π 的整数倍. 复数辐角的多值性和“周期性”可以通过数形结合，让学生从终边相同的角相差 2π 的整数倍的角度加以认识. 为了研究方便，有些教材也规定$[0，2\pi)$范围内的辐角为非零复数 z 的辐角主值.

这部分内容，可以让学生适当加强训练，课堂上可以考虑补充如下内容：

①如果 $\arg z=\theta$，则复数 z 的辐角构成集合$\{\alpha|\alpha=\theta+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$.

②当 a 是正实数时，有 $\arg a=0$，$\arg(-a)=\pi$，$\arg(-ai)=\dfrac{3\pi}{2}$.

教材 P. 118 图 3. 4 - 5 给出的示意图，表示出了复数对应的向量$\overrightarrow{OP}$在复平面上第一象限内的情况，对于$\overrightarrow{OP}$在其他象限或在实轴、虚轴上的情况，教学时可借助信息技术手段，让学生观察并思考是否也有与第一象限一致的结果. 再利用 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，最终得到复数的三角表示式 $z=r\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$，复数的三角表示式是本节课的教学难点，教学时要充分注意复数与平面向量、三角函数之间的关系.

复数的三角表示，实质上是用一个有序实数对$(r，\theta)$来确定一个复数，在得出复数的三角表示后，教师应引导学生分析 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$的结构特点：

①r 是复数的模，$r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$；

②式中的三角函数是同一个辐角值 θ 的余弦和正弦；

③$\cos\theta$ 在前，$\sin\theta$ 在后；

④$\cos\theta$ 和 $i\sin\theta$ 之间用“+”连接.

因此，一个表示复数的式子是否为三角形式，不能只看它是否含有正弦和余弦符号，还要看这个式子是否正确地给出了模、辐角及其连接符号.

教学时，可利用本节教材中课后习题 3. 4 第 1 题进行复数三角形式的辨析，并借助三角函数的诱导公式，将非三角形式表示的复数化为三角形式.

要注意复数 0 的特殊性：一方面，前面对 r 的约束可以扩展为 $r\geqslant 0$；另一方面，0 的辐角可以是任意值，这与零向量的方向是任意的保持一致.

应引导学生从复数相等的含义出发，通过适当推理得出，两个用三角形式表示的非零复数相等的充要条件. 教学中可以引导学生按照下面的思路进行探究：两个复数相等⇔两个复数对应的向量相同⇔两

个向量的长度相等且方向相同⇔两个复数的模相等且辐角相差 2π 的整数倍. 通过推理，结论的得出顺理成章，且易于接受.

4. 复数乘法运算的几何意义

如果两个复数 z_1，z_2 都表示成了三角形式 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则复数 z_1 乘 z_2 可以分两步进行：第一步先乘 $\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2$，将 z_1 代表的向量$\overrightarrow{OZ_1}$旋转角 θ_2 变成$\overrightarrow{OP}$，长度不变，辐角 θ_1 加 θ_2 变成 $\theta_1+\theta_2$. 第二步再乘正实数 r_2，方向不变，长度$|z_1|=r_1$ 乘 r_2 变成 r_1r_2.

事实上，也可将复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 看作是特殊的代数形式来推导，即设 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，那么 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=a+b\mathrm{i}$. 利用复数的乘法运算法则，将两个以三角形式给出的复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ 相乘，再利用两角和的正弦、余弦公式，就能得出复数乘法运算法则的三角表示. 即

$$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

教学中，要让学生体会复数乘法运算从旋转变换角度探究问题的简洁性，同时注意启发学生尝试用文字语言表述复数乘法运算的三角表示.

复数的乘法用三角形式来表示，不只是结果简单，更重要的是其几何意义明显，即复数的乘积相当于向量的旋转及伸缩变换. 教学时，应让学生体会复数的乘法运算与辐角的旋转变化，以及模的伸缩变化之间的关系，渗透数形结合思想.

将复数三角形式的乘法推广到有限个复数相乘，所得复数的乘方计算公式又叫作棣莫弗公式.

公式可以描述为：复数的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍. 利用这个公式不仅可以很方便地求出 $z^n(n\in\mathbf{N}_+)$，而且还可以用来求复数的开方，同时还能用于证明许多三角恒等式.

有条件的话，可以进一步研究复数的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 次方根的计算，并得到结论：复数的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 次方根是 n 个复数，这些 n 次方根的模都等于这个复数的模的 n 次方根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0，1，2，…，$n-1$ 倍的和的$\dfrac{1}{n}$.

5. 复数除法运算的几何意义

对于复数除法运算的三角表示，教材中是根据复数除法运算是乘法运算的逆运算这一规定，由复数乘法运算的三角表示，利用“配凑”的方法推导得出的.

除了教材给出的方法外，还可以利用共轭复数，通过“分数”运算直接得出复数除法运算的三角表示，具体如下：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

教材中的方法利用了化归与转化的数学思想，将复数除法运算转化为乘法运算，运算过程比较简洁；上述方法则直接利用了“分数”的性质，学生比较容易想到，但计算稍复杂些，两种推导方法各有所长，教学时可以根据学生的具体情况选取适当的方法.

6. 例题的教学分析

例 1　可结合前一节学习的实数与复数相乘的几何意义来说明，即可由实数与该复数对应的向量来

表示，复数 $a\mathrm{i}$，$-a$，$-a\mathrm{i}$，a 分别对应向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}$，则$\overrightarrow{OB}=(0,\ a)$，$\overrightarrow{OC}=(-a,\ 0)$，$\overrightarrow{OD}=(0,\ -a)$，$\overrightarrow{OA}=(a,\ 0)$. 从数与形的对应关系可以发现，向量每旋转 90°，其所对应的复数就相应乘 i. 本例题教学时，可要求学生结合已学知识进行归纳，并可提出：如果正实数 a 旋转 n（$n\in\mathbf{N}^*$）次后，则对应的复数是什么？总结出 $n=4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$（$k\in\mathbf{N}^*$）时，分别对应的复数是 a，$a\mathrm{i}$，$-a$，$-a\mathrm{i}$.

例 2 验证一般情形下虚数单位 i 的几何意义，教学时仍可结合复数的几何意义说明，引导学生去发现旋转前后两个复数的关系，并得出结论.

例 3 是求平面直角坐标系下点的旋转变换后的坐标，教学时应引导学生发现点的坐标与复数的对应关系，并能及时运用所学知识解决问题，体现知识学习的价值，激发学习兴趣.

例 4 是运用前面学习的复数乘 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 的几何意义，进一步解释旋转两个 45°，就是把对应的向量旋转 90°，即(1，0)旋转 90°后对应的复数是 i. 旋转三个 120°，对应的向量旋转 360°，即(1，0)旋转 360°后回到原处.

例 5 是讲解如何将复数的代数形式转化为三角形式，注意引导学生从两种思路去思考. 思路一是先求得复数的模，接着由三角函数值的定义，得到辐角的正弦值、余弦值，再由三角函数值求得辐角为 $[0,\ 2\pi)$的值，进而可写出复数的三角形式；思路二类似于研究正弦型函数时用到的“辅助角公式”，先求出复数的模(直角三角形中的“斜边”)，再找辐角，最后写出三角形式. 需注意在由三角函数值求辐角时，首先要根据 a，b 的正负确定辐角所在的象限，再根据 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$，求出 $\theta\in[0,\ 2\pi)$的值.

教材中采用的是第一种方法，这种方法简洁方便，教学中要提醒学生，在将复数的代数形式化为三角形式时，并不要求辐角取$[0,\ 2\pi)$，只是习惯上选取辐角的主值($\theta\in[0,\ 2\pi)$)来表示辐角.

至于将复数的三角形式转化为代数形式，直接利用公式，求出三角形式中的正余弦值即可.

例 6 帮助学生掌握复数代数形式下乘方运算的方法，并培养他们的计算能力. 讲解本题时，教师应指出：如题目不作要求，复数乘方运算的计算结果可以用三角形式表示.

例 7 帮助学生巩固复数三角形式的除法的运算法则，提醒学生如果不是复数的三角形式，应先将所有复数写成三角形式，再按照法则进行运算. 当然，这里也可以用前面学过的复数代数形式的除法法则进行运算，但用三角形式进行除法运算常常可简化计算过程. 同时运算的结果最好写成代数形式，这样表示复数形式更简洁.

例 8 教材上设出了所求根为 $x=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，运用复数的乘方运算，然后用待定系数的方法求解.

7. 相关链接

有趣的四元数

提起陀螺仪，相信很多人都不陌生，几乎每一款智能手机都装有陀螺仪. 手机导航、AR 扫描、手机游戏(如 VR 实景、都市赛车、现代战争)等都离不开它，它已经和人们的生活、工作密不可分. 利用陀螺仪，人们可以精准地分析判断出物体在三维空间中的运动情况(包括位移和旋转)，而这些功能的实现离不开数学上的一种代数结构——四元数体.

我们知道，质点在一维空间中的移动包括左平移和右平移，它可以用实数的加减运算完美地表示.

但是我们无法用实数来描述质点在二维空间中的运动，因为在二维空间中，质点的运动方式除了平移之外还有旋转．然而，如果我们将实数域扩大到复数域，复数的乘、除法恰好可以用来描述质点的旋转，从而复数运算与二维空间中的质点运动完美匹配．那么复数是否可以用来描述三维空间中的质点运动呢？按照前面的思路，我们自然想到将复数域扩大，得到一个“三维复数”来描述质点在三维空间中的运动．然而事实证明“三维复数”只能描述质点在三维空间中的平移，而不能实现旋转．因此，这种做法是行不通的．

经过不懈努力，数学家终于发现表示三维空间向量的三维复数域是不存在的．但是，英国数学家哈密顿在 1843 年发现“四维复数”有四元数．一般地，形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的数为四元数，其中 a，b，c，d 都是实数，i，j，k 都是虚数单位，这些虚数单位满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1.$$

给定两个四元数，可以进行与复数类似的加法和减法运算，例如

$(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})+(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})=8+10\mathrm{i}+12\mathrm{j}+14\mathrm{k}.$

不过，两个四元数相乘的情况就比复数相乘复杂得多．因为，除了会出现 i^2，j^2，k^2 之外，还会出现 ij，ik，jk，ji，ki，kj 等．一般地，两个四元数相乘时，规定

$$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},$$
$$\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},$$
$$\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}.$$

例如，

$$\begin{aligned}&(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})\\=\ &(12-21-32-45)+(14+18+36-40)\mathrm{i}+\\&(16+24+35-27)\mathrm{j}+(18+30+24-28)\mathrm{k}\\=&-86+28\mathrm{i}+48\mathrm{j}+44\mathrm{k}.\end{aligned}$$

由此也可以看出，四元数的乘法是不满足交换律的．

不过，有意思的是，与复数的乘法能够表示平面直角坐标系中的旋转类似，四元数的乘法能够表示空间中的旋转．因此，四元数在描述三维旋转、姿态方面有一些独特的优点，人们经常使用四元数去描述飞行器、机器人等的姿态．感兴趣的可自行查阅有关资料．

Ⅲ 教学设计案例

3.1 复数的概念

1. 教学目标

（1）了解引入复数的必要性.

（2）了解数系扩充的一般“规则”，了解从实数系扩充到复数系的过程，感受数系扩充过程中人类理性思维的作用，提升数学抽象、逻辑推理素养.

（3）理解复数的代数表示式、复数的有关概念、复数相等的含义.

2. 教学重难点

重点：从实数系扩充到复数系的过程与方法，复数的概念.

难点：复数系扩充过程的数学基本思想，复数的代数表示.

3. 教学基本流程

创设情境，引出研究内容

↓

归结为方程求解，梳理数系扩充的“规则”

↓

依据规则，扩充实数集，引入复数

↓

精选例题，强化理解应用

↓

反思总结，提炼学习收获

↓

布置作业

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
我们知道，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时没有实数根．因此，在研究代数方程的过程中，如果限于实数集，有些问题就无法解决．事实上，数学家在研究解方程的问题时早就遇到了负实数的开平方问题．	通过对复数发展历史的简要介绍，特别是形如 $x^2=-1$ 的方程根的问题的介绍，引发学生的认知冲突，激发学生对数系扩充过程的兴趣，并点出本节课的主要内容，进而简要介绍本章的学习内容，使学生对本章的知识脉络有大致认识．	教师引导为主，主要介绍历史上数学家们经过反复的研究探索，将实数系进一步扩充，引入了一种新的数——复数，从而将实数系扩充到复数系，解决了负数开平方的问题．
从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2=-a$（$a>0$）是否有解，也就是 $x^2+a=0$ 是否有解的问题，思考一下，能不能把这类问题再进一步简化，最终转化为最简单的方程 $x^2+1=0$ 是否有解的问题呢？	为后续从解方程的角度来研究数系的扩充做好铺垫，同时也让学生认识到数学中的复杂问题可以通过转化与化归的方法，转化为基本问题．	学生思考、演算，教师引导．
我们把一个数集连同规定的运算以及满足的运算律叫作一个数系．回顾从自然数系逐步到实数系的扩充过程，每一次数系扩充的主要原因是什么？分别解决了什么实际问题和数学问题？你能借助下面的方程，从解方程的角度加以说明吗？（1）在自然数集中求方程 $x+1=0$ 的解；（2）在整数集中求方程 $2x-1=0$ 的解；（3）在有理数集中求方程 $x^2-2=0$ 的解．	通过梳理数的发展历史，抓住知识的“生长点”和学生的“最近发展区”，使学生了解数的产生以及数系的不断扩充是基于两方面原因：社会生产实践的需要和数学自身发展的需要．	教师提出问题，学生分组讨论，从两个角度思考问题，可让一半学生侧重讨论解决的实际问题，另一半学生侧重讨论解决的数学问题，教师参与到讨论之中，对学生讨论中的不足之处进行补充说明，讨论后，学生交流互动，师生共同归纳总结出结论．
数集的每一次扩充，都是在原来数集的基础上添加“新数”得到的，引入新数就要引入新运算，如果没有运算，数集中的数只是一个个孤立的符号，加法和乘法运算是数系中最基本的运算(减法、除法运算分别可以转化成加法、乘法运算)．梳理从自然数系逐步扩充到实数系的过程，数系的每一次扩充，加法和乘法运算满足的“性质”有一致性吗？由此你能梳理出数系扩充遵循的“规则”吗？	梳理数系扩充过程和方法的“一致性”，总结数系扩充的一般“规则”，为后续实数系的进一步扩充提供方法，进而突破本节课的难点．	教师引导分析，探求从自然数集扩充到有理数集以及从有理数集到实数集的扩充中，加法和乘法满足的“性质”，教师要特别强调从有理数集扩充到实数集满足的“性质”，师生共同总结这些性质的一致性，得出数系扩充的“规则”：数集扩充后，在新数集中规定的加法运算和乘法运算，与原数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律．
方程 $x^2+1=0$ 在实数系中无解，类比从自然数系扩充到实数系的过程，特别是从有理数系扩充到实数系的过程，你能设想一种方法，使这个方程有解吗？	教师介绍与虚数单位 i 有关的历史，激发学生的学习兴趣，强化学生对 i 的认识．	教师通过课件介绍虚数的引入历史，并给出虚数单位的概念．

续表

问题	问题设计意图	师生活动
把新引进的数 i 添加到实数集中后，我们希望按照前面总结的数系扩充“规则”，对实数系进行进一步扩充，那么，实数系经过扩充后，得到的新数系由哪些数组成？	引导学生类比自然数系到实数系不断扩充过程中所遵循的规则，根据“运算”和“运算律”，由特殊到一般，抽象概括出复数的代数形式和复数集，让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用，以及数学形式化、符号化的过程，突破本节课的难点，提升学生逻辑推理、数学抽象素养.	教师引导学生归纳：新数集中的数是由原来的实数和新引入的虚数 i 经过适当“组合”而成的，构成的方法就是将实数和 i 进行运算，组成新数，这里主要进行的是 i 和实数之间的加法、乘法运算，因为按照前面总结的规则：新数集中规定的加法和乘法运算，与原来数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且运算律仍然成立.
阅读教材，回答以下问题： (1) 复数 $a+bi$ (a，$b\in\mathbf{R}$) 的虚数单位、实部、虚部分别是指什么？ (2) 什么是虚数和纯虚数？完成教材 P. 101 例 1，例 2.	通过问题引导，指导学生阅读教材，思考并回答问题，明确复数的基本概念，培养阅读教材的习惯和阅读理解能力.	教师提出问题，学生独立阅读教材，阅读之后回答问题，并独立完成例 1，例 2. 小组检查核对.
我们知道复数集是由形如 $a+bi$ (a，$b\in\mathbf{R}$) 的数组成的，为了保证集合中元素的互异性，我们需要明确集合中两个元素相等的含义，请阅读教材，说说两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$) 相等的含义，并独立完成教材 P. 102 例 3.	从保证集合中元素的互异性出发，引出在实数集中引入新对象后，要研究两个新数相等的含义，进而给出两个复数相等的含义，并由复数相等的定义，得到复数实质上是一个有序实数对，为研究复数的几何意义以及复数的三角表示奠定基础.	学生思考回答，教师补充完善. 教师巡查例 3 的解答过程.
我们已经将实数集扩充到复数集，那么复数集 $\mathbf{C}$ 和实数集 $\mathbf{R}$ 之间有什么关系？你能对复数 $a+bi$ (a，$b\in\mathbf{R}$) 进行分类，并用 Venn 图表示吗？	引导学生弄清楚复数集和实数集之间的关系以及复数的分类，深化学生对复数集是实数集的“扩充”以及对复数概念的理解.	学生思考并写在练习本上，教师巡视指导，学生用多媒体等设备交流展示，教师指出实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，也体现了数系扩充的规律之一：新数集包含原来的数集.
思考“复数不能比较大小”是否正确？	巩固复数概念.	学生讨论，教师点评.
小结，并完成教材 P. 102 练习 1，2，3，4.	对数系扩充过程以及对复数实质的理解方面的收获进行小结.	课堂交流，也可写在自己的笔记本上.
作业：教材 P. 103 习题 3.1　1，2，3，4，5.		

3.2　复数的四则运算

1. 教学目标

掌握复数的加法、减法、乘法、除法的运算法则，提升数学运算素养.

2. 教学重难点

重点：运用复数代数形式加法、减法、乘法、除法的运算法则进行简单的运算.

难点：理解复数的加法、减法、乘法、除法的运算法则.

3. 教学基本流程

回顾多项式的运算，引入复数加减法

↓

思考和推导加法运算律

↓

类比多项式的运算，引入复数乘法

↓

探讨、分析、思考复数乘法相关运算律及指数幂的性质

↓

类比分式，引出复数的除法

↓

了解简单复数方程的根，为复数的三角形式做铺垫

4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问题</th><th>问题设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>回顾多项式的运算，我们怎样定义复数的加法运算?</td><td>引导学生进行类比思考，并通过自己的判断和思考感受运算的产生过程.</td><td>师：引导学生思考怎样定义加法运算才是最自然、最简洁的. 指导学生确定复数加、减法得到的新复数的实部和虚部.
生：它的实部是原来两个复数实部的和，虚部是原来两个复数虚部的和.
师（补充）：类似代数式的合并同类项的运算.</td></tr>
<tr><td>如何定义复数的减法运算?</td><td colspan="2">生 1：类比实数运算中减法是加法的逆运算.
生 2：它的实部是原来两个复数实部的差，虚部是原来两个复数虚部的差.</td></tr>
<tr><td>复数加法运算满足哪些运算律?</td><td>从具体延伸到一般.</td><td>生：交换律和结合律.
师：
交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$.
结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.
教师引导学生思考、讨论，交流如何证明运算律.</td></tr>
<tr><td>如何定义复数的乘法运算?</td><td colspan="2">生：实部与实部相乘，虚部与虚部相乘.
师：引导学生讨论这种定义的局限性，并进一步探讨怎样的运算是最自然的.
生：代数式去括号的运算.
师：强调不要求记忆，只需要注意按照代数式去括号运算展开，以及 $i^2=-1$.</td></tr>
<tr><td>乘法运算有哪些运算性质?复数的乘方是什么含义?乘方运算有哪些性质?</td><td>进一步引导学生用类比方式思考问题，体会将新问题化归为旧问题的重要数学思想.</td><td>生：
$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$,
$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$,
$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.
生：在复数集中，实数集中的正整数指数幂运算律仍然成立：
$z^m\cdot z^n=z^{m+n}$,
$(z^m)^n=z^{mn}$,
$(z_1\cdot z_2)^m=z_1^m\cdot z_2^m$.</td></tr>
</table>

续表

问题	问题设计意图	师生活动
虚数单位的乘方运算？	利用乘方运算性质或者多次利用乘法运算推导.	生：$i^0=1$（规定），$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$.
如何进行复数的除法运算？	类比分式的除法，引出分母实数化.	$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. 此公式不要求死记，只要求掌握方法思路.
如何在复数范围内求解一元二次方程？	运用平方根的定义求解. 引出 $\Delta<0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 的根的解法.	可要求学生记忆 $x=\frac{-b\pm\sqrt{\lvert b^2-4ac\rvert}\,i}{2a}$.
小结提升	对比实数运算，总结复数四则运算.	完成教材 P. 108 练习 1，2，3.
作业：教材 P. 108 习题 3.2　1，2，3，4，5.		

3.3　复数的几何表示

1. 教学目标

（1）理解复数的几何意义，会判断复平面中复数对应的点所在象限.

（2）理解并掌握复数的模与共轭复数的概念.

（3）了解复数加法的几何意义，培养直观想象、数学抽象素养.

2. 教学重难点

重点：复数的几何意义及模.

难点：复数的几何意义及模的综合应用.

3. 教学基本流程

回顾实数的表示方法，引导学生思考复数的几何意义

↓

认识和理解复平面相关概念

↓

理解复数的模的含义

↓

探索复数模的相关性质，深化概念理解

↓

给出共轭复数的定义，探究其性质

↓

对概念的理解升华：复数加法的几何意义

↓

练习、交流、巩固、反馈

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
回顾实数的表示方法，由实数的表示方法联想：复数应该有哪些表示方法？	在类比中推陈出新.	生：实数与数轴上的点一一对应； 生：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a, b)$ 一一对应. 师：进一步引导学生联系向量.
复平面的概念是什么？复数在复平面上对应的点怎么确定？	认识基本概念.	生：将所有复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 一一对应的点 $Z(a, b)$ 所在的平面称为复平面.
我们知道，任何两个实数都有大小关系，那么用什么方式去刻画复数的大小？	深化概念，体会复数几何意义的作用.	师：利用复数的几何意义，如何定义复数的大小？ 生：复数 z 的模 $\|z\|$. 师：复数的模就是表示复数的向量的模，也就是表示复数的点到原点的距离，是一个非负数，具有明确的几何意义.
请说出三个模为 5 的复数，还有多少个满足此条件的复数？若 $2\leqslant\|z\|\leqslant3$，则复数 z 对应的点的集合是什么图形？	进一步理解复数的模的概念及复数在复平面上对应点的含义.	
类比分母有理化的思路，如何定义共轭复数？	师：在数的概念里面有相反数的概念，在复数中，我们有什么样的特殊概念呢？共轭复数怎样定义？ 生：定义复数 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数.	
探索共轭复数的性质.	培养学生提出问题，解决问题的探索精神.	学生合作探究，教师指导.
复数加法的几何意义.	师：复数加法的几何意义就是向量加法的平行四边形法则.	
复数减法的几何意义.	师：复数的减法由对应向量的减法来表示.	
课堂练习：教材 P. 113 练习 1，2，3，4. 通过练习，进一步巩固对相关概念的理解.		
作业：教材 P. 113～114 习题 3.3　1，2，3，6.		

*3.4　复数的三角表示（第 2 课时）

1. 教学目标

（1）会求复数的辐角，深刻理解复数三角形式的结构特征，会熟练进行复数的代数形式与三角形式的互化，培养学生的数学抽象、几何直观素养.

（2）利用复数三角形式熟练进行复数乘除运算，并能根据乘除运算的几何意义解决相关问题.

2. 教学重难点

重点：复数的代数形式向三角形式转化，复数乘除运算几何意义的综合应用.

难点：复数乘除运算几何意义的综合应用.

3. 教学基本流程

由向量引出复数的三角表示

↓

会将复数代数形式化为三角形式

↓

掌握复数三角形式的乘除及乘方运算

↓

归纳总结

4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
我们已经知道任意复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 与复平面内的向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应，观察分析教材 P. 118 图 3.4－5，能否借助向量的大小和方向这两个要素来表示复数呢？你认为如何表示？	借助复数的几何意义，引导学生尝试定量刻画向量的大小和方向，为得出复数的三角表示形式奠基，这也是得出复数三角表示形式的第一个关键环节.	学生在教师的引导下，观察图形、思考、讨论，发现解决问题的首要环节是应定量刻画向量的大小和方向这两个要素，并且向量 $\overrightarrow{OP}$ 的大小可以用复数的模 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 来表示，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向可以借助角 θ 来表示.
你能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模和以 x 轴的非负半轴为始边，以 $\overrightarrow{OP}$ 所在射线（射线 OP）为终边的角 θ 来表示复数 z 吗？	要求学生进一步借助图形，得出 r 和角 θ 与平面向量的坐标（a，b）的关系，从而感受复数与平面向量的关系以及数形结合思想，这是得出三角表示式的另一个关键环节.	分组讨论，让学生利用复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的向量表示的图形（教材 P. 118 图 3.4－5），容易得出 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$， 所以复数 $z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$.
教材 P. 118 图 3.4－5 中角 θ 的终边落在第一象限，得到 $z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$， 这个式子是否具有一般性呢？即若角 θ 的终边落在其他象限，这个式子还成立吗？若落在坐标轴上呢？	让学生分析角 θ 的终边落在各个象限或实轴、虚轴的情况，由具体到抽象，由特殊到一般，归纳出复数的三角表示式，感受数学的严谨性，培养抽象概括能力.	教师可借助信息技术工具，改变平面向量 $\overrightarrow{OP}$ 的位置，让学生观察分析得出结论，不管角 θ 的终边落在什么位置，都有 $z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 教师指出 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫作复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角表示式，简称三角形式，其中角 θ 既可以用弧度表示，也可以用角度表示，为与三角形式区分开，把 $z=a+b\mathrm{i}$ 叫作复数的代数式，简称代数形式.
一个复数的辐角的值有多少个？这些辐角的值之间有什么关系呢？若复数为 0，它的辐角是多少？	让学生根据平面直角坐标系中终边相同的角的特点，得出复数辐角的多值性，以及这些值之间相差 2π 的整数倍；类比零向量，了解复数为 0 时辐角的任意性.	引导学生结合教材 P. 118 图 3.4－5，利用终边相同的角的特点，容易得出：任何一个不为零的复数的辐角的值有无限多个；因为任一与角 θ 终边相同的角，都可以表示成角 θ 与整数个周角的和，所以这些辐角的值之间相差 2π 的整数倍；引导学生分析，复数 0 对应零向量，而零向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的，而不是 0.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
教材 P. 118 例 5.	一方面让学生进一步体会复数的几何意义，感受复数和平面向量一一对应的关系；另一方面是借助与复数对应的点的坐标，判断角 θ 的终边所在的象限，体会将复数代数形式化为三角形式的基本方法.	先由学生思考发言，师生共同总结解题的基本思路，教师板书第（1）小题，学生书写第（2）小题完整的解题步骤. 教师总结解题思路：复数的几何意义是解决此类问题的关键，要通过数形结合解决问题. 只要确定复数的模和一个辐角，就能将复数的代数形式转化为三角形式. 而利用 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 即可求得模，先借助向量的坐标判断辐角的终边所在象限，再利用 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$ 的值求辐角.
我们知道复数的加、减运算具有几何意义，那么复数乘法很可能也具有几何意义. 请你由旋转任意角及复数的三角表示等知识探究复数乘法运算的三角表示.	让学生借助图形进行分析，探究得出复数乘法三角表示的几何意义，体会数形结合思想，同时培养学生的自主学习能力和合作意识.	学生用纸笔画出草图，分组讨论交流. 教师借助几何画板画出 z_1，z_2 对应的向量，演示乘法运算的过程，学生归纳得出三角表示的复数乘法运算的几何意义（教材 P. 119 图 3.4－6）. 探究的结论是：复数乘法能表示成三角形式，其三角表示公式为 $z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ $=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$.
将复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 看作是特殊的代数形式来推导，即设 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，从代数运算的角度，你能利用复数的乘法运算法则计算 z_1z_2 的结果吗?	让学生独立思考、自主探究，侧重经历复数乘法的三角表示公式得出的过程，从中进一步体会复数和三角之间的紧密联系.	给学生充分的自主活动时间，让他们经过独立思考和演算后，由学生汇报交流，教师及时补充或纠正错误.
你能将复数三角形式的乘法推广到有限个复数相乘吗? 你能得出什么结论?	让学生应用复数三角形式的乘法运算公式进行推导，并结合结论说明其几何意义.	引导学生进行类比思考，多个向量的乘积可以逐个进行计算，并得到公式可以描述为：复数的 n $(n\in\mathbf{N}_+)$ 次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍. 指出利用这个公式不仅可以很方便地求出 z^n $(n\in\mathbf{N}_+)$，而且还可以用来求复数的开方，同时还能用于证明许多三角恒等式.
教材 P. 119 例 6.	让学生进一步理解和运用已学公式.	引导学生联想三角表示的复数乘方运算及其几何意义，并培养他们的计算能力. 讲解本题时，教师应指出：如题目不作要求，复数乘法运算的计算结果可以用三角形式表示.
除法运算是乘法运算的逆运算. 根据复数乘法运算的三角表示，你能得出复数除法运算的三角表示吗? 你能用文字语言加以表述吗?	引导学生借助已有知识和运算技巧推导复数除法运算的三角表示，体会化归与转化和类比的数学思想，提升数学运算素养.	教师引导，学生讨论，得出将复数除法运算转化为乘法运算的方法(配凑法). 学生自己推导得出复数除法运算的三角表示公式，教师板书公式，并引导学生总结. 用文字语言可表述为：两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.
请学生自己独立完成教材 P. 120 例 7，例 8，教师补充讲解.	让学生利用复数除法运算的三角表示公式进行运算，进一步熟悉算理，指导学生.	学生独立完成后反馈交流，提醒学生如果不是复数的三角形式，应先将所有复数写成三角形式，再按照法则进行运算.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
课堂练习：教材 P.121 练习 2，3. 目的是加深复数三角形式的乘除法的理解，并将运算法则与几何意义结合起来.		
作业：教材 P.122 习题 3.4　1，2，3.		

5. 几点说明

1. 讲解如何将复数的代数形式转化为三角形式时，应注意引导学生从两种思路去思考，思路一是先求得复数的模，接着由三角函数值的定义，得到辐角的正弦值、余弦值，再由三角函数值求得辐角为$[0,2\pi)$的值，进而可写出复数的三角形式；思路二类似于研究正弦型函数时用到的“辅助角公式”，先找出复数的模(直角三角形中的“斜边”)，再找辐角，最后写出三角形式.

2. 有条件的话，可以进一步研究复数的$n(n\in \mathbf{N}_+)$次方根的计算(教材 P.121“多知道一点”)，并得到结论：复数的$n(n\in \mathbf{N}_+)$次方根是n个复数，这些n次方根的模都等于这个复数的模的n次方根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与2π的$0,1,2,\cdots,n-1$倍的和的$\frac{1}{n}$.

Ⅳ 本章小结与评价

本章学业要求

1.（1）通过方程的解，认识复数.

（2）理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义.

2. 掌握复数代数表示式的四则运算，了解复数加、减运算的几何意义.

3. 通过复数的几何意义，了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

本章小结

1. 复数的学习是中学阶段数系的又一次扩充，可以使学生对于数的概念有一个初步、完整的认识. 应通过本章小结回顾数系逐步扩充到复数的过程，让学生从解决实际问题和数学自身发展两个角度去思考：为什么要不断地加入新的数？新的数是如何定义的？同时可让学生结合自己的学习体会，感受历史上引入复数漫长而曲折的过程，并认真感受这个过程中数学家丰富、深邃的想象力和创造力，以及不屈不挠、精益求精的精神，进而培养学习的毅力和斗志，激发学习的积极性.

2. “运算”是贯穿本章的一条主线. 复数属于代数领域，与中学阶段的其他代数内容一样，它肩负着培养学生的运算能力的重任. 教师可引导学生总结这些运算，主要包括复数代数形式的四则运算、复数三角形式与代数形式的互化以及复数三角形式的乘除运算等，教学中应加强这些运算的训练，不断提升学生的数学运算素养.

3. 在将实数系扩充到复数系的过程中，教师应引导学生了解扩充数系的“规则”既具有一般性，同时又有一定的局限性.

一方面，在从自然数系逐步扩充到复数系的过程中，每次扩充数系时，新数系中的加法、乘法运算与原数系中的相应运算相容，并保持运算律，这是扩充数系过程中的共性规律，即扩充数系的“规则”.

另一方面，上述扩充数系的“规则”有着一定的局限性，一是新数系中的加法、乘法运算各自都具有不同于原数系中相应运算的一些特征，并且每次扩充时的特征也不尽相同. 二是按照从自然数系逐步扩充到复数系的“规则”，就无法继续扩充复数系了，要继续扩充复数系，必须对“规则”进行适当限制. 例如，将复数系扩充为四元数域时，就要放弃实数系中乘法运算的交换律. 因此，扩充数系的“规则”具有一定的局限性.

在总结提升的过程中，既要考虑数系扩充“规则”在中学阶段的普适性，充分重视在“规则”的引导下将实数系扩充到复数系；同时又要注意其局限性，把握好体现“规则”的度，切不可盲目地一般化，应避免将中学阶段扩充数系的“规则”拔高为“公理”.

本章评价建议

1. 本章应关注学生是否了解数系扩充的必要性，是否理解复数的代数形式，是否知道复数的几何意义，是否知道两个复数相等的含义；是否掌握复数的四则运算法则并能熟练运用；是否知道复数加、减运算的几何意义；是否知道复数三角形式的基本结构及其几何意义，是否会进行复数代数形式和三角形式的互化；是否知道复数乘、除运算的三角表示及其几何意义等.

2. 本章要特别关注学生能否运用数形结合的思想方法分析问题和解决问题. 如学生能否在复平面内正确画出表示复数的点或向量，能否理解复数代数表示式的加、减运算的几何意义，能否在复平面内作出复数乘、除运算的几何表示，能否借助复数乘、除运算的几何意义解决复数、三角函数以及向量中的一些问题等.

3. 注重评价学生能否利用类比的方法研究问题. 例如，学生能否类比有理数系扩充到实数系的方法来研究实数系的扩充问题，能否类比实数四则运算的法则和运算律得出复数四则运算的法则和运算律，能否类比复数加法运算的几何意义得出复数减法运算的几何意义，能否类比代数形式的两个复数相等的充要条件得出三角形式的两个复数相等的充要条件，能否类比三角形式的复数乘法运算的几何意义得出三角形式的复数除法运算的几何意义等.

另外，也需关注学生直观想象能力的提升. 例如，学生是否理解复数的几何意义，是否理解复数加、减运算的几何意义就是向量的加、减运算，是否能够用向量表示复数，是否能够借助复数乘、除运算的几何意义解决简单的复数、三角、向量和平面几何问题等.

本章检测试题

一、 选择题

1. 设复数 $z=(1+a\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$，若 z 的实部和虚部相等，则实数 a 的值为（　　）

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -3

2. 已知复数 z 满足 $|z-1|=1$，则 $|z^2+z-2|$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设复数 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$），若 $\dfrac{y}{1-\mathrm{i}}=x+\mathrm{i}$，则复数 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 设复数 $z=(a+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$，则复数 z 在复平面内对应的点在直线（　　）上

A. $x=y$　　B. $x+y=1$　　C. $x+y=2$　　D. $x=0$

5. 已知复数 $z=a+\dfrac{10\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$，若 z 为纯虚数，则 $|a-2\mathrm{i}|=$（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

6. 已知复数 $z=\dfrac{(3\mathrm{i}-1)(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^{2\,019}}$，则下列说法正确的是（　　）

A. z 的虚部为 4　　B. 复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限

C. z 的共轭复数为$\overline{z}=4-2i$　　D. $|z|=2\sqrt{5}$

7. 已知复数 $z=\dfrac{2+ai}{1+i}$ 对应的复平面上的点位于第二、四象限的角平分线上，则实数 a 的值为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

8. 设 a 为实数，复数 $z_1=a-2i$，$z_2=-1+ai$，若 z_1+z_2 为纯虚数，则 $z_1z_2=$（　　）

A. $1+3i$　　B. $2+6i$　　C. $-6+6i$　　D. $-3+3i$

9. 设 z 为非零复数，则 $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbf{R}$ 是 $|z|=1$ 的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分又不必要

10. 已知复数 z 满足 $z-i=\dfrac{3+2i}{i}$，则复数 z 的三角形式是（　　）

A. $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　B. $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

C. $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$　　D. $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

11.（多选题）已知复数 z，下列结论正确的是（　　）

A. “$z+\overline{z}=0$”是“z 为纯虚数”的充分不必要条件

B. “$z+\overline{z}=0$”是“z 为纯虚数”的必要不充分条件

C. “$z=\overline{z}$”是“z 为实数”的充要条件

D. “$z\cdot\overline{z}\in\mathbf{R}$”是“$z$ 为实数”的充分不必要条件

12.（多选题）设 $z=(2t^2+5t-3)+(t^2+2t+2)i$，$t\in\mathbf{R}$，则以下结论正确的是（　　）

A. z 对应的点在第一象限　　B. z 一定不为纯虚数

C. z 一定不为实数　　D. $\overline{z}$ 对应的点在实轴的下方

二、 填空题

13. 已知复数 $z=\dfrac{i}{m-i}$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 m 的取值范围是________.

14. 已知复数 $z=(a-i)^2\cdot i$，若 $z<0$，则实数 a 的值为________.

15. 将复数 $z=1+\sqrt{3}i$ 对应的向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点 O 逆时针旋转 θ 角$(0<\theta<2\pi)$，得到向量$\overrightarrow{OP}$，若向量$\overrightarrow{OP}$对应的复数为-2，则 θ 的值为________.

三、 解答题

16. 设 z 为复数，$w=(z+2i)\overline{z}$.

(1) 若 w 为纯虚数，且$|w|=2$，求 z 的值；

(2) 若存在复数 z，使 $w=3+ai$，求实数 a 的取值范围.

17. 已知 z 为虚数，且 $z+\frac{10}{z}\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $|z|$ 的值；

(2) 若 $1<z+\frac{10}{z}\leqslant 6$，且 z 的实部和虚部都为整数，求 z 的值.

18. 已知 z 为虚数，且 $|z|=1$，设 $u=\frac{1-z}{1+z}$.

(1) 证明：复数 u 为纯虚数；

(2) 求 $z+\frac{1}{z}-u^2$ 的取值范围.

19. 欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x(x\in\mathbf{R})$ 是由瑞士著名数学家欧拉提出的，它将指数函数的定义域扩大到复数，阐述了三角函数和指数函数的关系，它在复变函数论里占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”. 根据欧拉公式：

(1) 判断复数 e^{2i} 在复平面内对应的点位于第几象限，并说明理由；

(2) 若 $e^{ix}<0$，求 $\cos x$ 的值.

参考答案

一、选择题

1. A　2. B　3. D　4. C　5. B　6. D　7. C　8. A　9. B　10. D　11. BC　12. CD

二、填空题

13. $(0, +\infty)$　14. -1

15. $\frac{2\pi}{3}$　因为 $z=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，则 $2\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-2$，所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1$. 因为 $0<\theta<2\pi$，所以 $\theta=\frac{2}{3}\pi$.

三、解答题

16. (1) 设 $z=x+yi$ $(x, y\in\mathbf{R})$，则 $w=|z|^2+2i\bar{z}=x^2+y^2+2i(x-yi)=x^2+y^2+2y+2xi$.

由已知，得 $w=\pm 2i$，则 $\begin{cases}x^2+y^2+2y=0,\\2x=\pm 2,\end{cases}$ 解得 $x=\pm 1$，$y=-1$，所以 $z=\pm 1-i$.

(2) 因为 $w=3+ai$，则 $\begin{cases}x^2+y^2+2y=3,\\2x=a,\end{cases}$ 得 $y^2+2y+\frac{a^2}{4}-3=0$.

根据题意，上述关于 y 的方程有实根，则 $\Delta=4-4\left(\frac{a^2}{4}-3\right)\geqslant 0$，即 $a^2\leqslant 16$，得 $-4\leqslant a\leqslant 4$，

所以 a 的取值范围是 $[-4,4]$.

17.（1）因为 $z+\frac{10}{z}\in\mathbf{R}$，则 $z+\frac{10}{z}=\overline{z+\frac{10}{z}}=\bar{z}+\frac{10}{\bar{z}}$，即 $z+\frac{10}{z}-\bar{z}-\frac{10}{\bar{z}}=0$，

即 $z-\bar{z}+\frac{10(\bar{z}-z)}{z\bar{z}}=0$，即 $(z-\bar{z})\left(1-\frac{10}{z\bar{z}}\right)=0$.

因为 z 为虚数，则 $z-\bar{z}\neq 0$，从而 $1-\frac{10}{z\bar{z}}=0$，即 $z\bar{z}=10$，即 $|z|^2=10$，所以 $|z|=\sqrt{10}$.

（2）设 $z+\frac{10}{z}=a$，则 $z^2-az+10=0$，即 $\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-40}{4}$.

由 $1<a\leqslant 6$，则 $a^2-40<0$，所以 $z-\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{40-a^2}}{2}\mathrm{i}$，即 $z=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{40-a^2}}{2}\mathrm{i}$.

因为 z 的实部 $\frac{a}{2}$ 为整数，则 $a=2$ 或 4 或 6.

当 $a=2$ 时，$\frac{\sqrt{40-a^2}}{2}=3$，符合题意；当 $a=4$ 时，$\frac{\sqrt{40-a^2}}{2}=\sqrt{6}$，不合题意，舍去；

当 $a=6$ 时，$\frac{\sqrt{40-a^2}}{2}=1$，符合题意.

综上可得，$z=1\pm 3\mathrm{i}$ 或 $z=3\pm\mathrm{i}$.

18.（1）设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），因为 $|z|=1$，则 $a^2+b^2=1$.

所以 $u=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-a-b\mathrm{i}}{1+a+b\mathrm{i}}=\frac{(1-a-b\mathrm{i})(1+a-b\mathrm{i})}{(1+a)^2+b^2}=\frac{1-a^2-b^2-2b\mathrm{i}}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}\mathrm{i}$.

因为 z 为虚数，则 $b\neq 0$，从而 $\frac{b}{a+1}\neq 0$，所以 u 为纯虚数.

（2）因为 $u^2=\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2=\frac{1-2z+z^2}{1+2z+z^2}=\frac{z+\frac{1}{z}-2}{z+\frac{1}{z}+2}$，设 $x=z+\frac{1}{z}$，则

$z+\frac{1}{z}-u^2=x-\frac{x-2}{x+2}=x-\left(1-\frac{4}{x+2}\right)=x+2+\frac{4}{x+2}-3$.

因为 $|z|=1$，则 $z\bar{z}=1$，所以 $x=z+\frac{1}{z}=z+\bar{z}=2a$.

因为 $a^2+b^2=1$，$b\neq 0$，则 $-1<a<1$，所以 $x\in(-2,2)$，$x+2\in(0,4)$.

于是 $x+2+\frac{4}{x+2}-3\geqslant 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{4}{x+2}}-3=1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $z+\frac{1}{z}-u^2$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

19.（1）复数 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于第二象限. 理由如下：$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}=\cos 2+\mathrm{i}\sin 2$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(\cos 2,\sin 2)$，由于 $\frac{\pi}{2}<2<\pi$，因此 $\cos 2<0$，$\sin 2>0$，$\therefore$ 点 $(\cos 2,\sin 2)$ 在第二象限，故复数 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于第二象限.

（2）$\because \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x<0$，$\therefore \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 为实数，

$\therefore\begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x=0,\end{cases}$ $\therefore \cos x=-1$.

V. 教材练习（习题）答案

3.1 复数的概念

练习（第 102 页）

1. (1) 实部-1，虚部 1　(2) $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，实部$\frac{\sqrt{2}}{2}$，虚部$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 实部 2，虚部$-\sqrt{2}$　(4) 实部 0，虚部$-\frac{1}{2}$

2. 当 $a^2+2a-3=0$ 且 $a+3\neq0$ 时成立，解得 $a=1$.

3. (1) $x=-\frac{2}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$　(2) $\begin{cases}x=3,\\y=-8\end{cases}$或$\begin{cases}x=-8,\\y=3\end{cases}$

4. (1) 错误，虚数不能比较大小

(2) 正确

习题 3.1（第 103 页）

1. D　2. A　3. A

4. (1) $m=5$ 或-3　(2) $m=2$　(3) $m\neq5$ 且 $m\neq-3$

5. (1) $\begin{cases}a=2,\\b=-1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}a=1,\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1,\\b=-3\end{cases}$

6. (1) $\frac{n-4}{m^2-3m-4}=0$，$n^2+3n-4\neq0$，$m^2-3m-4\neq0$，

解得 $n=4$，$m\neq4$ 且 $m\neq-1$.

(2) $n^2+3n-4=0$，且 $m^2-3m-4\neq0$.

解得 $n=-4$ 或 1，$m\neq4$ 且 $m\neq-1$.

7. 要满足$\begin{cases}\lambda^2<10,\\-(\lambda^2-3\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或 3.

3.2 复数的四则运算

练习（第 108 页）

1. (1) $3+4\mathrm{i}$　(2) 10　(3) -4　(4) i

2. 注意到$\sqrt[3]{-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，$\therefore(m+m\mathrm{i})^2=4\mathrm{i}$.

$(m+m\mathrm{i})^2=2m^2\mathrm{i}=4\mathrm{i}\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

3. (1) $x=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$　(2) $x=2\pm\mathrm{i}$

习题 3.2（第 108 页）

1. $z_1+z_2=8+2\mathrm{i}$，$z_1-z_2=-2-6\mathrm{i}$，$z_1z_2=23+2\mathrm{i}$

2. $z=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\Rightarrow 2z+1=-\sqrt{3}\mathrm{i}$,

即 $4z^2+4z+1=-3\Rightarrow z^2+z+1=0$.

$\therefore z^2=-z-1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^3=-z^2-z=1$，$z^2+z+1=0$.

3. $\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=-\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

$a=-1+\mathrm{i}$，$a^2=-2\mathrm{i}$，$a^4=-4$.

4. 注意到 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$\mathrm{i}^{4k}=1$，$\mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4k+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$.

原式 $=(1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i})+(1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i})+\cdots+1+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.

5. $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{4}$

6. (1) $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$　(2) $z=\dfrac{1+7\mathrm{i}}{2}$

7. 原式 $=\dfrac{x(1+\mathrm{i})}{2}+\dfrac{y(1+2\mathrm{i})}{5}=\dfrac{5(1+3\mathrm{i})}{10}$.

有 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{5}y=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{5}y=\dfrac{3}{2}$，解得 $x=-1$，$y=5$. 所以 $x+y=4$.

8. (1) $(x+3\mathrm{i})(x-3\mathrm{i})$　(2) $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(a+b)(a-b)$

(3) $(a+b+c\mathrm{i})(a+b-c\mathrm{i})$　(4) $(x+2)(x+3)$

9. $(1+3\mathrm{i})\cdot z=(3-3b)+(b+9)\mathrm{i}$ 为纯虚数 $\Rightarrow b=1$，$z=3+\mathrm{i}$.

$w=\dfrac{3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5}=\dfrac{7-\mathrm{i}}{5}$.

3.3　复数的几何表示

练习（第 113 页）

1. 这两点关于 x 轴对称，图略

2. 略

3. $\overline{z}_1=3+4\mathrm{i}$，$\overline{z}_2=-2-3\mathrm{i}$，$\overline{z}_1-\overline{z}_2=5+7\mathrm{i}$，在复平面内对应的点位于第一象限.

4. $1+2\mathrm{i}$

习题 3.3（第 113 页）

1. 由题意知 $a^2-2a=0$，$a^2-a-2\neq 0\Rightarrow a=0$.

2. 由 $\begin{cases}-3+k^2<0,\\ -(k^2-2)<0\end{cases}$ 可得 $\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}<k<-\sqrt{2}$.

3. 以原点为圆心，以 3 和 4 为半径的两圆所夹的圆环，不包括圆环的边界

4. (1) 略

(2) $|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，$|-3-4\mathrm{i}|=5$，$|4+3\mathrm{i}|=5$，$|4\mathrm{i}|=4$，$|-\sqrt{5}\,\mathrm{i}|=\sqrt{5}$

(3) $\overline{-1+\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$，$\overline{-3-4\mathrm{i}}=-3+4\mathrm{i}$，$\overline{4+3\mathrm{i}}=4-3\mathrm{i}$，$\overline{4\mathrm{i}}=-4\mathrm{i}$，$\overline{-\sqrt{5}\,\mathrm{i}}=\sqrt{5}\,\mathrm{i}$. 图略

5. $(-1+2\mathrm{i})+(-2-3\mathrm{i})=-3-\mathrm{i}$，$(-1+2\mathrm{i})-(-2-3\mathrm{i})=1+5\mathrm{i}$. 图略

6. $x_0=m+1$，$y_0=m-1$，$x_0+y_0-4=0$，解得 $m=2$.

7. 设 $z=x+y\mathrm{i}$，x，$y\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$.

原方程可以化为 $x^2+y^2-3\mathrm{i}(x-y\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$，即 $x^2+y^2-3y-3x\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}$.

所以 $x^2+y^2-3y=1$，$-3x=3$，解得 $x=-1$，$y=0$ 或 3.

$\therefore z=-1$ 或 $-1+3\mathrm{i}$.

8. 提示：设 z_1，z_2 分别对应$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则

$\big||\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|\big|\leqslant|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\leqslant|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$，习题 1.2 第 7 题已经证明过.

9. (1) $\overrightarrow{AB}$对应 $1+\mathrm{i}$，$\overrightarrow{AC}$对应 $-2+2\mathrm{i}$，$\overrightarrow{BC}$对应 $-3+\mathrm{i}$.

(2) $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,1)$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\triangle ABC$ 为直角三角形.

(3) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=2$.

*3.4 复数的三角表示

练习（第 121 页）

1. $-3=3\cos\pi$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi$

2. (1) $8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ (2) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

3. $(1-\mathrm{i})^{1\,000}=\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)^{1\,000}\cdot(\sqrt{2})^{1\,000}=(\cos 1\,750\pi+\mathrm{i}\sin 1\,750\pi)\cdot 2^{500}=2^{500}$.

习题 3.4（第 122 页）

1. (1) $2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$ (2) $2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\dfrac{6}{5}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{6}{5}\pi\right)$ (4) $2\left(\cos\dfrac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{3}{10}\pi\right)$

2. (1) 原式$=32\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=16+16\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(2) 原式$=4\dfrac{\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ}{\cos(-210^\circ)+\mathrm{i}\sin(-210^\circ)}=4(\cos 450^\circ+\mathrm{i}\sin 450^\circ)=4\mathrm{i}$.

3. (1) $|z^2|=|z|^2=2\Rightarrow z^2=2\mathrm{i}$.

又点 A 在第一象限，设 $z=a+b\mathrm{i}$，$a>0$，$b>0$，a，$b\in\mathbf{R}$.

$$\therefore\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2},\\ z^2=2\mathrm{i}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2,\\ a^2-b^2=0,\\ 2ab=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$$

$\therefore z=1+\mathrm{i}$.

(2) $z^2=2\mathrm{i}$，$z-z^2=1-\mathrm{i}$.

$\therefore A(1,1)$，$B(0,2)$，$C(1,-1)$，$\therefore \overrightarrow{BA}=(1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-3)$，

$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. (1) 原式$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5}{7}\pi\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5}{7}\pi\right)=\cos\dfrac{3}{14}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{3}{14}\pi$.

(2) 原式$=\cos(2\pi-\alpha)+\mathrm{i}\sin(2\pi-\alpha)$.

5. 旋转后的向量对应的复数为$(3-\sqrt{3}\mathrm{i})\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=(3-\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

6. 记 $z_1=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，

$z_2=2+\mathrm{i}=\sqrt{5}(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$，$z_3=3+\mathrm{i}=\sqrt{10}(\cos\gamma+\mathrm{i}\sin\gamma)$，

$z_1\cdot z_2\cdot z_3=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta+\gamma)]=(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=10\mathrm{i}$，

$\therefore \cos(\alpha+\beta+\gamma)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\mathrm{i}$，$\therefore \angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

复习题三（第 126 页）

1. (1) 真命题　(2) 真命题

(3) 真命题　(4) 假命题，因为$|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=1$

2. $\dfrac{\pi}{2}$　3. $-\dfrac{1}{5}$

4. (1) $-21+24\mathrm{i}$　(2) $-32-\mathrm{i}$

(3) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}$

(4) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

5. (1) $\dfrac{11+5\mathrm{i}}{146}$　(2) $-1-8\mathrm{i}$　(3) $\dfrac{7-49\mathrm{i}}{25}$　(4) $\dfrac{1}{2}$

6. $2\mathrm{i}$

7. (1) $z=1+\mathrm{i}$　(2) $z=\dfrac{1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$

8. $2-\mathrm{i}$

9. $z=(2m+1)(m-2)+m(m-1)\mathrm{i}$.

(1) $\begin{cases}(2m+1)(m-2)<0,\\ m(m-1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}<m<2,\\ m>1\text{ 或 }m<0,\end{cases}$ 即 $1<m<2$ 或 $-\dfrac{1}{2}<m<0$.

(2) 由题意得$(2m+1)(m-2)\cdot m(m-1)>0$，

解得 $m<-\dfrac{1}{2}$ 或 $0<m<1$ 或 $m>2$.

(3) 由题意得$(2m^2-3m-2)-(m^2-m)-1=0$，即 $m^2-2m-3=0$，解得 $m=3$ 或 -1.

*10. (1) $\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(2) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right)$　(3) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$　(4) 是三角形式

*11. (1) 原式$=16\left(\cos\frac{5}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{12}\pi\right)=4\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\mathrm{i}\right]$.

(2) 原式$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cos(-240^\circ)+\mathrm{i}\sin(-240^\circ)}{\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

12. 向量$\overrightarrow{OZ'}$对应的复数为

$(-1+\mathrm{i})(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)=(-1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$.

13. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathbf{R}$，则 $z+\frac{1}{z}=(a+b\mathrm{i})+\frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}\Rightarrow b=\frac{b}{a^2+b^2}$，即 $a^2+b^2=1$ 或 $b=0$.

$|z-2|=2\Rightarrow(a-2)^2+b^2=4$.

综上可得$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\ b=0.\end{cases}$ $\therefore z=4$ 或 $z=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$.

14. 设 z_1 对应向量$\overrightarrow{OZ_1}$，z_2 对应向量$\overrightarrow{OZ_2}$.

$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=\sqrt{|\overrightarrow{OZ_1}|^2+|\overrightarrow{OZ_2}|^2+2\cos\theta\cdot|\overrightarrow{OZ_1}|\cdot|\overrightarrow{OZ_2}|}=\sqrt{5+2\sqrt{6}\cos\theta}=2\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}|=\sqrt{|\overrightarrow{OZ_1}|^2+|\overrightarrow{OZ_2}|^2-2\cos\theta|\overrightarrow{OZ_1}|\cdot|\overrightarrow{OZ_2}|}=\sqrt{5-2\sqrt{6}\cos\theta}$.

$\therefore|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}|=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

15. 由 14 题解析知$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=\sqrt{13+12\cos\theta}=4\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{4}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

故$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{15}}{6}\mathrm{i}$.

16. 由$|z|=2$ 可得点 Z 的集合是以原点为圆心，2 为半径的圆，$|z-\mathrm{i}|$表示圆上一点到点(0，1)的距离. 由几何图形知$|z-\mathrm{i}|_{\max}=3$(或者利用$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$).

17. (方法一) 设 $z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathbf{R}$.

$z^2=(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}=\mathrm{i}$，$\therefore a^2=b^2$，$2ab=1$. $\therefore a=b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 或$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

(方法二) $\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$，$\therefore z=\pm\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

*18. 由题意得$\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{n}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{n}{3}\pi=\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\begin{cases}\cos\frac{n}{3}\pi=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\\ \sin\frac{n}{3}\pi=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$ 解得$\frac{n\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{N}$. 故 $n=6k-1$，$k\in\mathbf{N}$.

19. $z^{15}=1=\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

则 $z^{15}-1=0$ 的 15 个根为 $w_k=\cos\frac{2k\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{15}(0\leqslant k\leqslant 14，k\in\mathbf{Z})$.

$z^{15}-1=(z-1)(z-w_1)(z-w_1^2)\cdot\cdots\cdot(z-w_1^{14})$.