前 言

有一个聪明的学生这样回答老师的提问：

老师问：假如你在森林里遇险，前面有狼，背后有虎，你怎么办?

学生答：我往旁边去.

不必羡慕他比你聪明．只要你学了向量，也能想到地面上除了前进后退还有别的方向，可以向左或向右.

地面上的运动有无穷多个不同方向，不能用一个实数表示，需要用向量表示．向量可以用几何线段来表示，向量运算代表图形的几何性质．同时向量运算受代数运算律指挥，由代数运算可得出几何结论．向量是沟通几何与代数的桥梁.

在 x 轴和 y 轴正方向各取单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成基，就能将平面上每个向量写成 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，好比用两把尺子量出两个实数 x，y，组成坐标 $(x,\ y)$ 来代表向量，并且用坐标运算代表向量运算.

用坐标 $(x,\ y)$ 表示向量有利于做代数运算．但向量的主要几何性质是大小和方向，由线段长度 r 和表示方向的角 α 刻画．因此需要将 $(r,\ \alpha)$ 与坐标 $(x,\ y)$ 相互转换．三角函数是实现这种转换的桥梁．同一个角的不同三角函数需要转换，两个角的三角函数需要转换为它们的和、差、倍角的三角函数，三角恒等变换是实现这些转换的桥梁.

x 轴正方向的 $\boldsymbol{e}_1$ 沿逆时针方向旋转 $90°$ 变成 y 轴正方向的 $\boldsymbol{e}_2$．将这个旋转动作记作 i，则 $\boldsymbol{e}_2=\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1$．$\mathrm{i}^2$ 表示旋转两个 $90°$，即旋转 $180°$，就是乘 -1，可见 $\mathrm{i}^2=-1$．将 i 看成数，称其为虚数单位，它表示的旋转却很实在．平面向量 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1=(x+y\mathrm{i})\boldsymbol{e}_1$ 可以看成 $\boldsymbol{e}_1$ 的 $x+y\mathrm{i}$ 倍，用复数 $x+y\mathrm{i}$ 表示．复数加减法代表向量加减法，还可以用复数乘法代表向量旋转角 α，复数也是桥梁.

我们生活在地面上，但并不是生活在平面里，而是生活在空间中．居住的房屋，使用的器具，都是几何体．本册将介绍立体几何初步知识，帮你初步了解一些简单几何体，主要是平面图形围成或者旋转而成的柱、锥、台、球，并

且了解这些平面图形所在平面或直线的相互位置关系：平行，垂直，……

我们以前学习的数学知识，大多数是根据确定的规律由事情的原因决定结果．天有不测风云，人有旦夕祸福，有大量现象不能由原因决定结果，具有偶然性，这些现象称为随机现象．随机现象也有一定的规律．概率是研究随机现象规律的学科．本册将结合具体的实例，对概率的基本性质做初步的介绍．

数学知识是事物的普遍规律．从特殊现象总结规律，用普遍规律解决具体问题，都需要透过事物特殊性质发现共同规律，将具体问题转化为数学问题，利用数学工具求解，再将数学解转化为具体解决方案．整个过程就是架设实际问题与数学理论之间的桥梁，即数学建模．向量、三角函数、复数、立体几何、概率统计都是数学建模建造的桥梁．本册还将补充更多贴近生活的例子．

当然，在我们同行的路途中，“数学文化”“数学实验”都不容错过．在这里，我们将了解数学的发展历程，认识数学在推动人类文明进程中所起到的作用，感悟数学的价值．而在数学实践中积极应用信息技术，将使我们的学习之路越走越宽．

让我们在广阔的数学天地中踏步前行吧！

目录 MULU

1

第1章

平面向量及其应用

几何和代数是数学的两个重要组成部分. 几何研究图形，直观形象易懂，但不易于计算. 代数研究数的运算，有现成规则可以遵循，但容易陷入数的海洋而不易理解算式的实际意义. 向量既可以画作几何图形，又可以进行代数运算，还可以通过坐标转化为数的运算，兼具几何与代数的优点. 向量的出现将发挥沟通几何与代数的桥梁作用.

本章我们将从物理、几何、代数三个角度来学习平面向量及其运算的几何意义和代数意义，并尝试运用向量来刻画和解决现实生活、数学和物理中的一些问题.

1.1 向　量

我们已经学了很多量，并且知道这些量可用实数(带单位)来表示其大小，如一个物体的质量、两点之间的距离、一个图形的面积等等.

很多时候只描述量的大小还不够. 例如，一艘船或一架飞机要去某地，除了需知道到目的地的距离外，还需知道目的地的方向. 又如，要描述一个物体的运动速度、作用在物体上的力，除了需知道它们的大小之外，还需知道它们的方向. 这些量都需要从大小和方向两方面来描述.

> 大海航行靠舵手. 你想过没有，舵手为什么重要?
>
> 迷路叫作“迷失方向”“找不着北”. 设想一下，为什么不叫“迷失距离”?

现实世界存在许多需要从大小和方向两方面来刻画的量，下面我们来学习一个基本的数学工具——向量.

一　向量的基本要素及几何表示

我们从物理学中的位移出发. 在物理学中，研究物体运动时，常常忽略物体的大小，把它当作一个质点，用点来表示它的位置. 质点从位置 A 运动到位置 B，位置的改变称为位移. 位移只刻画起点 A 与终点 B 的位置的差别. 如图 1.1－1，从 A 到 B 虽然有不同的路线，但只要是从 A 到 B，其位移就都是相同的，都用带箭头的线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示，其中箭头表示这条线段的方向是从 A 到 B，与质点实际运动的路线无关.

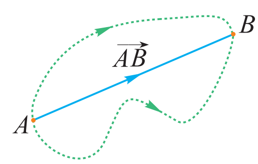


图 1.1－1

像 $\overrightarrow{AB}$ 这样具有方向的线段，称为**有向线段**.

位移的大小就是 A 到 B 的直线距离，记作 $|AB|$，也就是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，也记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

像位移这样既有大小又有方向的量，在数学中称为**向量**.

物理学中许多需要考虑大小和方向的量，如速度、加速度、力等，都可以用向量来描述.

为了区别向量与实数，我们将实数用普通的字母表示，如实数 a，b，λ，而向量用粗体字母(印刷)或在字母上方标箭头(书写)来表示，如向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{F}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{F}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，也就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记作 $|\boldsymbol{a}|$.

每个向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以用有向线段$\overrightarrow{PQ}$来表示．如图 1.1－2，从任一点 P 出发画射线 PM，其方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，在 PM 上截取线段 PQ，使$|PQ|=|\boldsymbol{a}|$，则$\overrightarrow{PQ}$的方向和长度分别代表了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向和大小，因而可以记为$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}$．

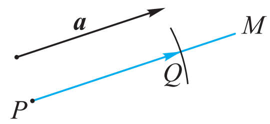


图 1.1－2

二　向量的相等

由物理学知识知道，如果一个质点沿如图 1.1－3 所示的▱$ABCD$ 的边从 A 运动到 B，或者从 D 运动到 C，这两次位移虽然起点不同，但方向相同、长度相等，就称它们是相等位移（或相同位移）．类似地，我们把方向相同、长度相等的向量称为**相等向量**．例如，在图 1.1－3 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$．

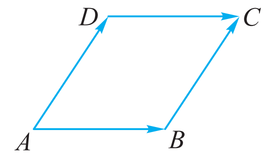


图 1.1－3

$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 虽然长度相等，但方向相反，因此 $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$．

类似于相反数的定义，我们把长度相等、方向相反的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为**相反向量**，记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$．如果 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，则同样也有 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$．

图 1.1－3 中，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 分别互为相反向量．

例 1　已知 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在图 1.1－4 所标出的向量中：

（1）找出与$\overrightarrow{FE}$相等的向量；

（2）找出几组相反向量．

解　（1）$\overrightarrow{BC}$ 与$\overrightarrow{FE}$方向相同且长度相等，故$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$．

（2）$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OC}$ 与$\overrightarrow{DE}$ 分别互为相反向量．

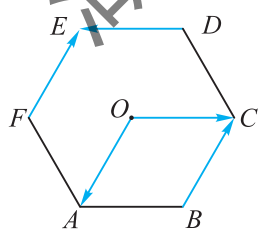


图 1.1－4

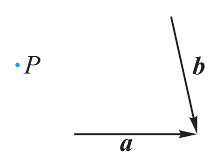


图 1.1－5

例 2　如图 1.1－5，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和点 P，以点 P 为起点，分别画有向线段表示下列向量：

（1）$\boldsymbol{a}$ 的相等向量；

（2）$\boldsymbol{b}$ 的相反向量．

解　（1）如图 1.1－6，作有向线段$\overrightarrow{PM}$，使$\overrightarrow{PM}$与 $\boldsymbol{a}$ 同向且长度相等，则$\overrightarrow{PM}$即为 $\boldsymbol{a}$ 的相等向量．

（2）如图 1.1－6，作有向线段$\overrightarrow{PN}$，使$\overrightarrow{PN}$与 $\boldsymbol{b}$ 反向且长度相等，则$\overrightarrow{PN}$即为 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量.

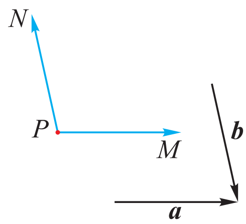


图 1.1－6

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小 $|\boldsymbol{a}|=0$，就称 $\boldsymbol{a}$ 是**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 若$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，则这个“有向线段”$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}$，它实际上是一个点，即停留在起点不动，所表示的位移为零.

我们约定，**所有的零向量相等**.

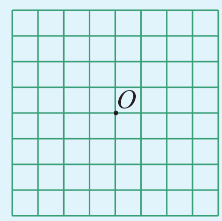
当$\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{0}$时，$|\overrightarrow{AB}|>0$，从 A 到 B 只能有唯一的方向. 而零向量$\overrightarrow{AA}$表示从 A 到 A，可以是任意方向.

练 习

1. 在如图所示的坐标纸中(每个小正方形的边长均为 1)，用直尺和圆规画出下列向量.

（1）$|\overrightarrow{OA}|=3$，点 A 在点 O 北偏西 45°方向；

（2）$|\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{2}$，点 B 在点 O 正南方向.



（第 1 题）

2. 下列条件中能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的是(　　)

（A）$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

（B）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同

（C）$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}$ 为任意向量

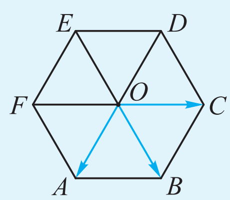
（D）$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

3. 如图，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 在以 A，B，C，D，E，F，O 这七个点中任意两点为起点和终点的向量中，问：

（1）与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有哪些？

（2）$\boldsymbol{b}$ 的相反向量有哪些？

（3）与 $\boldsymbol{c}$ 的模相等的向量有哪些？



（第 3 题）

习题 1.1

学而时习之

1. 某人从点 A 出发向西走 4 个单位长度到达点 B，然后改变方向朝西北方走 6 个单位长度到达点 C，最后又向东走 4 个单位长度到达点 D. 试分别作出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

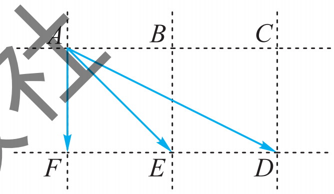
2. 在等边△ABC 中，P，Q，R 分别是 AB，BC，CA 的中点，在向量$\overrightarrow{PR}$，$\overrightarrow{QR}$，$\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{RC}$，$\overrightarrow{RA}$，$\overrightarrow{CR}$ 中，与$\overrightarrow{PQ}$ 相等的向量有哪些？$\overrightarrow{PQ}$ 的相反向量有哪些？

3. 如图，在方格纸中，取两个格子的格点(A，B，C，D，E，F)为起点和终点作向量，写出满足下列条件的向量：

(1) 与$\overrightarrow{AF}$ 相等的向量；

(2) $\overrightarrow{AE}$ 的相反向量；

(3) 与 $\overrightarrow{AD}$ 的模相等的向量.



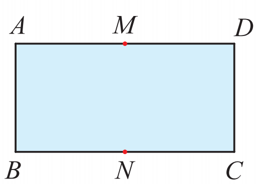
（第 3 题）

温故而知新

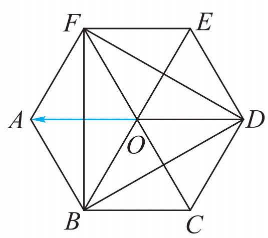
4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB=2$，M，N 分别为 AD 和 BC 的中点，以 A，B，C，D，M，N 为起点和终点作向量，回答下列问题：

(1) 在模为 1 的向量中，相等的向量有多少对？

(2) 在模为$\sqrt{2}$的向量中，相等的向量有多少对？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，以 A，B，C，D，E，F，O 七点中的任一点为起点，以与起点不同的另一点为终点的所有向量中，设与向量$\overrightarrow{OA}$相等的向量个数为 m，与向量$\overrightarrow{OA}$的模相等的向量个数为 n，求 m，n.

1.2 向量的加法

由线段围成的多边形是基本的几何图形．我们已经会用向量来表示多边形各边的方向和长度，还需要用向量的运算来刻画各边之间的关系．

一 三角形法则

如图 1.2－1，一艘船从码头 O 出发先往东行驶 40 km 到达位置 A，再往北行驶 30 km 到达位置 B，总的位移是多少？

这艘船先从 O 到 A，再从 A 到 B，总的效果是从 O 到 B，因而其总位移是$\overrightarrow{OB}$.

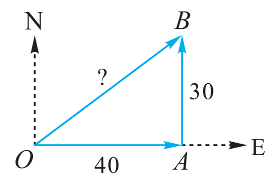


图 1.2－1

如图 1.2－1，OB 是 Rt△OAB 的斜边．由勾股定理得

$$|OB|=\sqrt{|OA|^2+|AB|^2}$$
$$=\sqrt{40^2+30^2}=50(\text{km}).$$

两段位移 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$ 分别是 40 km，30 km，相加得到总位移 $\overrightarrow{OB}$ 是 50 km．这样的运算有资格称为加法吗？

总位移$\overrightarrow{OB}$是两段航程的位移$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$的总效果，很自然地把它定义为两次位移之和：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

从位移求和，我们引出下述向量的加法法则．

如图 1.2－2，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 O，分别作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则定义从 O 到 B 的向量 $\overrightarrow{OB}$ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

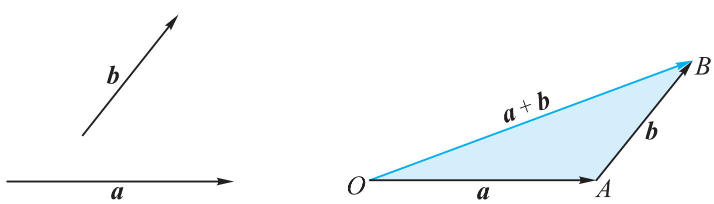


图 1.2－2

求向量和的运算称为**向量的加法**.

将两个向量表示为首尾相接的有向线段来求和的作图法则叫作**向量加法的三角形法则**.

之所以叫作三角形法则，是因为它定义的加法 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ 刻画了△OAB 三边之间的关系．

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，对于这种特殊情况，我们用图 1.2－3 来表示它们的和.

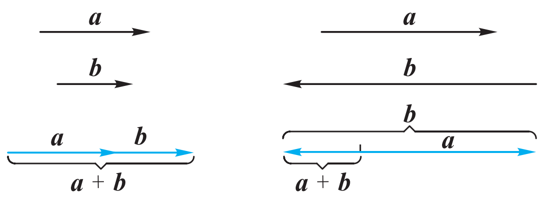


图 1.2－3

二 平行四边形法则

如图 1.2－4，若作用于同一点 O 的两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 可用由 O 出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 来表示，则两个力的合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 可用 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 表示.

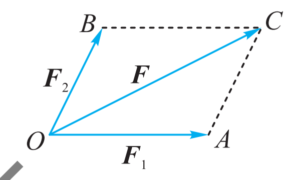


图 1.2－4

从 A 出发作 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，则由三角形法则可得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}.$$

因为 AC 与 OB 平行且相等，所以四边形 $OACB$ 是平行四边形. 因此，以上作出的 OC 是以 OA，OB 为一组邻边的▱$OACB$ 的对角线.

对于方向既不相同也不相反的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，还有一种求和的作图方法：

平行四边形法则 如图 1.2－5，从同一点 O 出发作有向线段 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，即 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

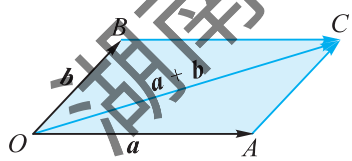


图 1.2－5

2 000 多年前，古希腊学者在研究力学时发现：作用在物体同一点上的两个力，其实际效果不是两个力大小的简单相加，而是遵循平行四边形法则.

三 加法运算律

数的运算和运算律紧密联系，运算律可以有效地简化运算. 类似地，向量的加法又有哪些运算律呢?

如图 1.2－6，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

以 AB，AD 为邻边作▱$ABCD$，则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$.

因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

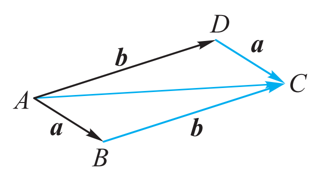


图 1.2－6

如图 1.2－7，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$.

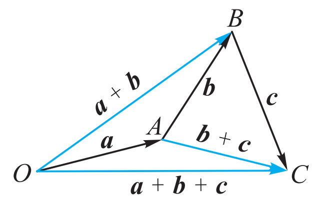


图 1.2－7

因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{OC},$$

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由三角形法则定义的向量加法虽然与数的加法不同，但同样满足交换律和结合律，因而也有资格被称为加法．按照我们熟悉的方式进行加法运算.

由上可知，向量的加法满足交换律和结合律：

（1）**加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 成立.**

（2）**加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 对任意三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成立.**

例 1 求证：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

已知：如图 1.2－8，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 的交点为 O，且 O 是 AC，BD 的中点.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

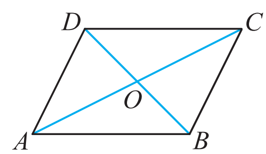


图 1.2－8

证明 由题知$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，

因此
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$$
$$=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}.$$

所以 AB，DC 平行且相等，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

四 零向量的加法性质

例 2 （1）已知任意向量 $\boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$；

（2）若两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，试探究 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之间的关系.

解 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

（1）由$\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}.$$

由$\overrightarrow{OO}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}.$$

（2）再作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$.

又 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO}$，于是点 B 与点 O 重合.

因此 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}$，与 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 长度相等，方向相反，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为相反向量.

虽然不能以 OA，AA 为“两边”作三角形，但仍然可以用三角形法则求和.

例 2 的结论可以作为定理来使用：

任意向量与零向量相加后保持不变，等于这个向量本身，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

如果两个向量之和为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等，方向相反，即 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$． 当然 $\boldsymbol{a}$ 也是 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，因此 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}=-(-\boldsymbol{a})$.

> 这是对“负负得正”的一个几何解释.

例 3 如图 1.2－9，平面上有任意四点 A，B，C，D，若 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，运用向量的加法证明 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

证明

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\\&=\boldsymbol{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

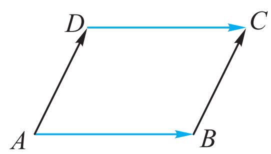


图 1.2－9

例 4 三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 大小相等，作用于同一点 O. 要使它们的合力为零，应满足什么条件？

解 如图 1.2－10，利用三角形法则作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}_2$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_3$.

要使 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}.$$

又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$，

所以 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OO}$，即点 C 与点 O 重合.

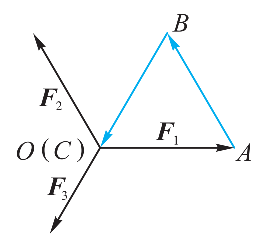


图 1.2－10

因此，分别代表力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的有向线段 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 构成了等边△ABC.

由图 1.2－10 可知，力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 之间、$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 之间、$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 之间的夹角都恰好是等边△ABC 的一个外角，都等于 120°.

因此，使三个大小相等、作用于同一点的力的合力为零的条件是，这三个力两两之间的夹角为 120°.

例 5 设 O 是等边三角形 ABC 的中心，求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

解 设 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 如图 1.2－11，将等边三角形绕点 O 逆时针旋转 120°，使顶点 A，B，C 分别转到点 B，C，A 的位置，则 $\boldsymbol{s}$ 跟着旋转 120°，变成了 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$. 由向量加法的交换律可知，向量 $\boldsymbol{s}$ 旋转 120°之后仍是其自身.

由于只有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$ 才有可能使 $\boldsymbol{s}$ 旋转 120°后仍是 $\boldsymbol{s}$，

于是 $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}.$$

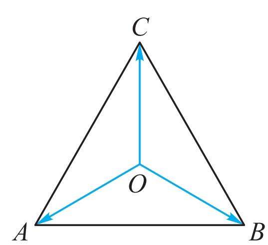


图 1.2－11

练习

1. 如图，已知下列各组向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

（第 1 题）

2. 有下列三个命题：

①若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；

②$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 的等价条件是点 A 与点 C 重合，点 B 与点 D 重合；

③若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

其中正确的命题有__________.

3. 点 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，下列结论正确的是(　　)

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$　　(B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DA}$

(C) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$　　(D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$

五　向量的减法

与数的减法一样，向量的减法同样作为向量加法的逆运算引入.

已知两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，这样的运算叫作**向量的减法**，记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之差.

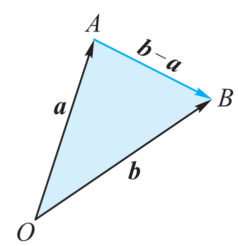


图 1.2－12

如图 1.2－12，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}$ 是△OAB 的三边，则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

因此，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

也可以由$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 经过加法得到$\overrightarrow{AB}$：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=(-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OB}\\&=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

于是，我们有

减去一个向量 $\boldsymbol{a}$，等于加上它的相反向量 $-\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

> 这也是依样画葫芦照搬实数等式 $b-a=b+(-a)$.

如图 1.2－12，任取一定点 O，从 O 分别观测 A，B 两点的方向和距离，则点 A，B 的位置由点 O 分别到 A，B 的两个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$唯一表示. $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别称为点 A，B 的位置向量，也即分别代表了 A，B 两点的位置，因而等式 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-$

$\overrightarrow{OA}$的物理意义就是：

$$位置的改变量=终点位置-起点位置.$$

因此，向量 $\overrightarrow{AB}$ 等于终点向量$\overrightarrow{OB}$ 减起点向量$\overrightarrow{OA}$.

例 6 如图 1.2－13，已知▱$ABCD$，用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$分别表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$.

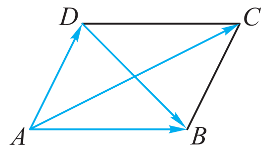


图 1.2－13

解 由向量求和的平行四边形法则，有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$$

由减法定义有

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}.$$

例 7 如图 1.2－14，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

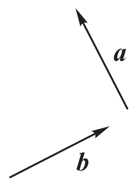


图 1.2－14

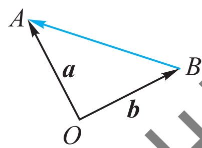


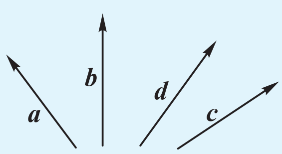
图 1.2－15

如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，怎样作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

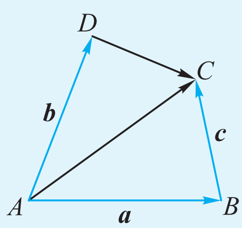
解 如图 1.2－15，在平面内任取一点 O，从同一点 O 出发作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{BA}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DC}$.

3. 化简：

（1）$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$；　　（2）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$；

（3）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

习题 1.2

学而时习之

1. 如图，根据图示填空：

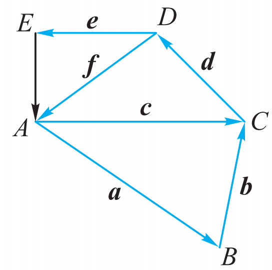
(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________；

(2) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=$________；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=$________；

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=$________；

(5) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{f}=$________.



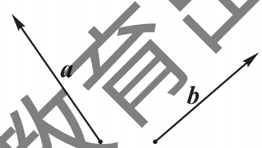
（第 1 题）

2. 在▱$ABCD$ 中，求$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$.

3. 如图，已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量.

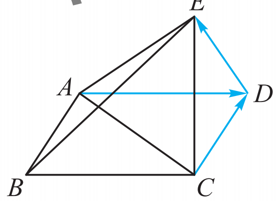
(1) 求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 成什么位置关系时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$？(不要求证明)

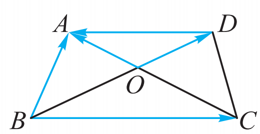


（第 3 题）

4. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别表示$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}$ 及$\overrightarrow{AC}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，AC 与 BD 交于点 O，化简$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$.

6. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$；

(3) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{BC}$.

温故而知新

7. 求证：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 成立.

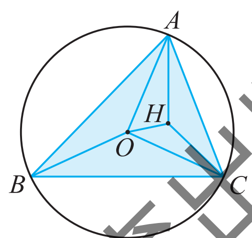
8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，问：表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段能否构成三角形？

9. （1）设 O 是正五边形 $ABCDE$ 的中心，求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$；

（2）设 O 是正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，求 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$.

10. （1）如图，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，H 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 求证：$H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.（提示：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CH}$.）

（2）若 H 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点，其余条件不变，(1)中的结论还成立吗？



（第 10 题）

1.3 向量的数乘

我们可用一把尺子去度量所有线段的长度，也就是把每条线段的长度写成这把尺子的非负实数倍.

如果把某个向量看作一把尺子，能用这把向量尺子去度量平面上的所有向量吗？如果不能，它可以度量平面内哪些向量呢？

一 向量的实数倍

已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，在 OA 的延长线上作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，如图 1.3-1，则

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}.$$

于是，很自然地将$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 定义为 $\boldsymbol{a}$ 的 2 倍，记作 $2\boldsymbol{a}$.

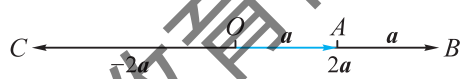


图 1.3-1

我们还可在图 1.3-1 中作$\overrightarrow{OB}$的相反向量$\overrightarrow{OC}$，则$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}=-2\boldsymbol{a}$，同样可将$\overrightarrow{OC}=-2\boldsymbol{a}$ 定义为 $\boldsymbol{a}$ 的 -2 倍，记作 $-2\boldsymbol{a}$.

由上可知，$2\boldsymbol{a}$，$-2\boldsymbol{a}$ 的长度都是$|\boldsymbol{a}|$的 2 倍，$2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$-2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 的 λ 倍，它的长度$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$.

当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向$\begin{cases}当 \lambda>0 时，与 \boldsymbol{a} 同向，\\ 当 \lambda<0 时，与 \boldsymbol{a} 反向；\end{cases}$

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

求向量的实数倍的运算称为**向量的数乘**.

向量数乘的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向放大或缩小.

我们把向量的加法、减法、数乘运算统称为**向量的线性运算**.

向量线性运算的结果仍是一个向量.

例 1 如图 1.3－2，在△OAB 中，M，N 分别是 OA，OB 的中点．设 $\overrightarrow{MO}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AB}$，并比较 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的长度和方向．

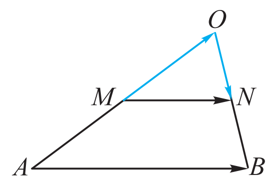


图 1.3－2

解 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})$

$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MN}$.

故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 方向相同，且 $|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{MN}|$.

例 1 的结论就是三角形中位线定理.

二 共线向量

已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，在直线 OA 外任取一点 O'，从点 O' 出发作 $\overrightarrow{O'B}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{O'C}=-3\boldsymbol{a}$，如图 1.3－3.

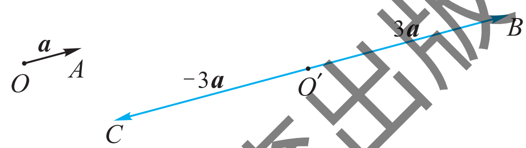


图 1.3－3

观察图 1.3－1 和图 1.3－3，可以发现，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$ 可分别用同一条直线上的有向线段表示，也可分别用相互平行的有向线段表示.

一般地，如果非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则可以将它们用同一条直线上的有向线段或相互平行的有向线段表示.

因此，当非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时，我们既称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **共线**，也称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **平行**，并且用符号“//”来表示它们共线(或平行)，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向是任意的，可以看成与任何一个向量方向相同，因此我们规定：零向量与所有的向量平行.

由向量平行和向量数乘的定义可以推知：

两个向量平行 ⇔ 其中一个向量是另一个向量的实数倍.

即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

根据上述结论，可以将平面几何中的共线或平行关系用向量的数乘运算来描述：对于线段 AB 与 CD，如果存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 AB 与 CD 共线或平行.

例 2 设 A，B，C 三点不共线，将下列几何语言用向量语言来描述：

(1) 四边形 $ABCD$ 是梯形，其中 AB，DC 是梯形的两底；

(2) M 是 BC 的中点；

(3) N 在线段 AM 上，且 $|AN|:|NM|=2:1$；

(4) P 在 MA 的延长线上.

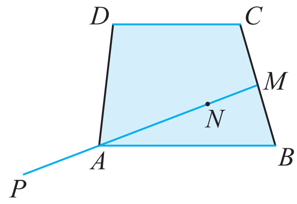


图 1.3－4

解 如图 1.3－4.

(1) 存在正实数 $\lambda\neq1$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC}$.

(2) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$ 或 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 或 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 等.

(3) $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NM}$ 或 $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ 或 $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ 等.

(4) $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MA}$，其中 $\lambda>1$；或 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}$，其中 $\lambda<0$；等等.

两个向量是否共线，也可从它们的夹角来判断.

如图 1.3－5，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则射线 OA，OB 所夹的最小非负角 $\angle AOB=\theta$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，取值范围规定为 $[0,\pi]$. 在这个规定下，两个向量的夹角被唯一确定了，并有 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

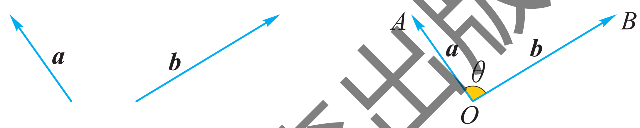


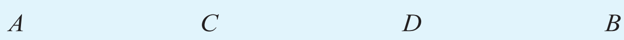
图 1.3－5

当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反. 这两种情形下 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在直线重合，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线. 当 $0<\theta<\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在直线相交于点 O，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，特别地，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

可以规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 0，零向量与任一向量平行，也可以规定 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，零向量与任一向量垂直.

练 习

1. 如图，C，D 将线段 AB 等分为三段，则



（第 1 题）

(1) $\overrightarrow{AC}=$________$\overrightarrow{CD}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}=$________$\overrightarrow{AC}$；

(3) $\overrightarrow{AD}=$________$\overrightarrow{BD}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，求作：

(1) $2\boldsymbol{b}$；　　(2) $2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$；　　(3) $3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

3. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

三　共线向量的运算

我们把长度为 1 的向量称为**单位向量**．它的长度等于单位长度．

对于任一非零向量 $\boldsymbol{a}$，都可得到与它方向相同的唯一单位向量 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$．

例 3　如图 1.3-6，在一条笔直的马路上，张明从家(点 O)出发，往东走 100 m 到公交站(点 A)乘车，乘车往西行 1.2 km 到达另一公交站(点 B)，下车后往东走 200 m 到达学校．不乘公交车，张明从家走到学校应往什么方向走？走多远？

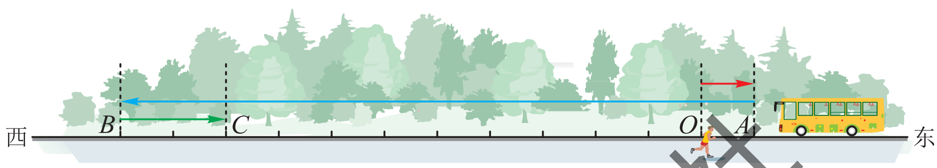


图 1.3-6

解　以往东为正方向，1 m 为单位长度，则张明每次移动的效果可分别用实数 100，$-1\ 200$，200 表示．

由于
$$100+(-1\ 200)+200=-900, \qquad ①$$
因此，不乘公交车，张明从家走到学校应往西走，并走 900 m.

在例 3 中，若记方向往东、长度为 1 m 的向量为单位向量 $\boldsymbol{e}$，则三个位移向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$分别为 $100\boldsymbol{e}$，$-1\ 200\boldsymbol{e}$，$200\boldsymbol{e}$，且三次行走的总效果$\overrightarrow{OC}=-900\boldsymbol{e}$.

于是，三个位移向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$相加的结果等于$\overrightarrow{OC}$，也就是说
$$100\boldsymbol{e}+(-1\ 200\boldsymbol{e})+200\boldsymbol{e}=-900\boldsymbol{e}. \qquad ②$$
对比①②，可以发现，正负数的加法可看作是计算这些正负数代表的向量的和.

一般地，在一条直线上任取单位向量 $\boldsymbol{e}$，则直线上任何向量 $\boldsymbol{a}$ 都可写成 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}$，其中实数 a 的绝对值$|a|$代表向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，a 的正负代表 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的方向相同或相反．反过来，任意给定一个实数 a，我们总能作一个向量 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}$，使它的长度等于这个实数 a 的绝对值，方向与实数 a 的符号一致.

于是，实数与共线向量之间可以建立起一一对应关系．也就是说，我们可用数值来表示向量，这将为平面向量的数量化奠定基础.

下面我们用向量的观点来重新认识初中学过的数轴.

在给定直线上任取一点 O 作为原点，其表示实数 0．取单位向量$\overrightarrow{OE}$，则点 E 表

示 1，如图 1.3－7.

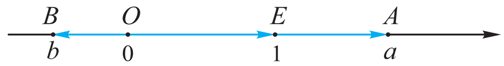


图 1.3－7

因此，在数轴上，任意一点 A 对应的实数 a 由 $\overrightarrow{OA}=a\boldsymbol{e}$ 决定，所表示的实际上是原点 O 到点 A 的位移向量 $\overrightarrow{OA}$. 因而代表数轴上任意两点 A，B 之间的位移向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=b\boldsymbol{e}-a\boldsymbol{e}=(b-a)\boldsymbol{e}$$

中的实数 $b-a$ 就等于分别代表 B，A 的实数 b，a 之差.

进一步，我们可以推出由实数 a，b 代表的共线向量的加、减、数乘运算法则为：

$$a\boldsymbol{e}\pm b\boldsymbol{e}=(a\pm b)\boldsymbol{e},\ a(b\boldsymbol{e})=(ab)\boldsymbol{e}.$$

四　数乘运算律

一般地，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意向量，x，y 是任意实数，则如下运算律成立：

（1）**对实数加法的分配律：**

$$(x+y)\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}.$$

（2）**对实数乘法的结合律：**

$$x(y\boldsymbol{a})=(xy)\boldsymbol{a}.$$

（3）**对向量加法的分配律：**

$$x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}.$$

运算律(1)(2)中的向量都是同一个向量 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}$ 的实数倍，因此运算律(1)(2)均可直接由实数运算律 $(x+y)a=xa+ya$，$x(ya)=(xy)a$ 得出.

对于运算律(3)，当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，即均可写成 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，则可由实数运算律 $(x+y)a=xa+ya$ 得到.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，作 $\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MO}=x\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=x\boldsymbol{b}$，如图 1.3－8，则

$$x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=\overrightarrow{MN}.$$

由于 $\dfrac{|OM|}{|OA|}=\dfrac{|ON|}{|OB|}=x$，$\angle MON=\angle AOB$，

所以 $\triangle MON\backsim\triangle AOB$，

则 $MN/\!/AB$，

且 $\dfrac{|MN|}{|AB|}=\dfrac{|OM|}{|OA|}=\dfrac{|ON|}{|OB|}=x$.

因此 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}$，即

$$x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

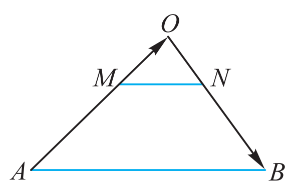


图 1.3－8

特别地，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，运算律(3)就是三角形中位线定理.

例 4 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线.

证明 因为
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b},\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b},\end{aligned}$$
所以
$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.$$
因此，A，B，C 三点共线.

例 5 如图 1.3－9，$\triangle ABC$ 中，AB 边的中点为 P，重心为 G. 在$\triangle ABC$ 外任取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OG}$.

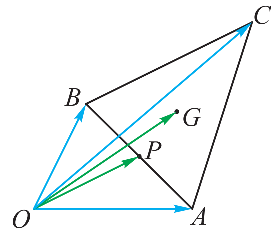


图 1.3－9

（1）试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

（2）试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OG}$.

解 （1）
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\\&=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

由例 5 的计算结果可知：表示线段 AB 中点 P 位置的向量$\overrightarrow{OP}$等于表示线段两个端点 A，B 位置的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的平均值$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，表示$\triangle ABC$ 的重心 G 的位置的向量$\overrightarrow{OG}$等于表示三角形三个顶点 A，B，C 位置的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的平均值$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

例 5 的(1)还可以这样计算：

由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$得
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OP}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$
所以
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

练 习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

2. 化简：

(1) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

3. 已知 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$.

求证：A，B，D 三点共线.

4. 已知$\square ABCD$ 的对角线相交于点 O，若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$.

习题 1.3

学而时习之

1. 已知△ABC，设 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$.

(1) 求作：$\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB_2}=-1.5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC_2}=-1.5\boldsymbol{c}$.

(2) 向量$\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{B_2C_2}$分别与$\overrightarrow{BC}$有什么关系？

2. 已知线段 AB，试根据下列描述说出 M，N 的位置.

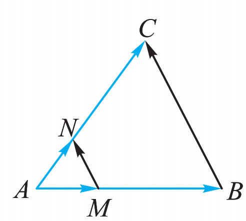
(1) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$；

(2) $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}$，其中 $0<\lambda<1$.

3. 已知任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，试作 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，你能判断 A，B，C 三点之间的位置关系吗？为什么？

4. 如图，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

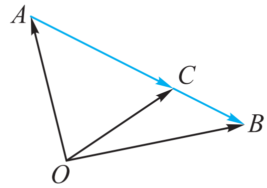
求证：$\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{BC}$，且$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



（第 4 题）

5. 已知数轴上三点 A，B，C 分别代表实数 -8，-2，5，求分别代表$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$的实数.

6. 如图，在$\triangle OAB$中，C为直线AB上一点，且$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$. 求证：$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$.



（第 6 题）

温故而知新

7. 已知四边形$ABCD$，M，N，P，Q分别是四边AB，BC，CD，DA的中点，依次连接MN，NP，PQ，QM. 记$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}$.

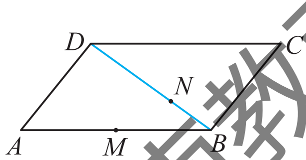
（1）用$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$表示向量$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{QP}$；

（2）试判断四边形$MNPQ$的形状.

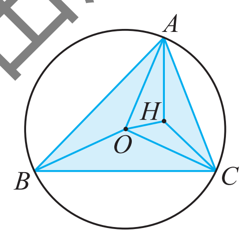
8. 已知$\triangle ABC$及其两边长$|AB|=c$，$|AC|=b$. 若点E在$\angle BAC$的平分线上，如何用向量语言描述点E的位置？（提示：菱形的每一条对角线平分一组对角.）

9. 如图，在▱$ABCD$中，点M是AB的中点，点N在对角线BD上，且$|BN|=\dfrac{1}{3}|BD|$.

求证：M，N，C三点共线.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 已知O为$\triangle ABC$的外心，H为垂心.
求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

上下而求索

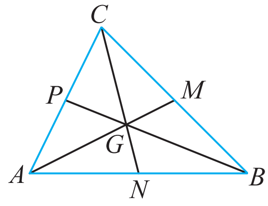
11. 用向量运算刻画三角形的重心.

（1）已知$\triangle ABC$，求一点G满足$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

（2）求证：满足条件$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$的点$G$是$\triangle ABC$的重心.

（提示：说明点G同时在$\triangle ABC$的三条中线上.）

12. 如图，G是$\triangle ABC$内任意一点，分别作直线AG，BG，CG交对边BC，AC，AB于M，P，N，已知$\dfrac{|AP|}{|PC|}=\lambda$，$\dfrac{|AN|}{|NB|}=\mu$，求$\dfrac{|CM|}{|MB|}$.



（第 12 题）

1.4 向量的分解与坐标表示

1.4.1 向量分解及坐标表示

一 平面向量基本定理

数学的任务就是把万事万物用数来刻画，用运算来研究. 我们知道，一条直线上所有的向量都可以写成该直线上单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的实数倍，如$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}$，并且用实数 x 来代表(这就好比用 $\boldsymbol{e}$ 作为“尺子”来度量$\overrightarrow{OA}$，得到量数 x). 同样的道理，该直线上的向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=y\boldsymbol{e}$ 的和或差 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x\pm y)\boldsymbol{e}$，可用 $x\pm y$ 代表；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x)\boldsymbol{e}$ 可用 λx 代表. 于是，共线向量运算 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 可转化为实数运算 $x\pm y$，λx.

平面上的向量并不都共线，即不能写成同一个向量 $\boldsymbol{e}$ 的实数倍，但可以取两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$作为“尺子”，将平面上任一向量表示成 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的实数倍之和.

如图 1.4－1，以 O 为起点作$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$. 过平面上任意一点 P 作 MP 与 OE_2平行或共线，则 MP 不与 OE_1平行或共线(否则 OE_1与 OE_2就会共线)，因此 MP 与直线 OE_1交于一点 P_1，则$\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{P_1P}=y\boldsymbol{e}_2$.

于是 $$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2. \qquad (*)$$

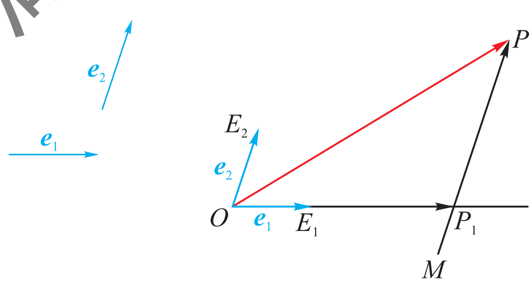


图 1.4－1

这说明对平面上任一个向量$\overrightarrow{OP}$，均可分解为两个不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍之和. 下面我们来证明(*)式中的系数 x，y 唯一确定.

假设实数 x'，y'满足$\overrightarrow{OP}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$.

若 $x'\neq x$，则 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{y-y'}{x'-x}\boldsymbol{e}_2$，这说明 $\boldsymbol{e}_1$与 $\boldsymbol{e}_2$共线，与已知矛盾，因此 $x'=x$.

同理可证 $y'=y$.

由此可得**平面向量基本定理**：

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线向量，则

（1）平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍之和，即

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

其中 x，y 是实数.

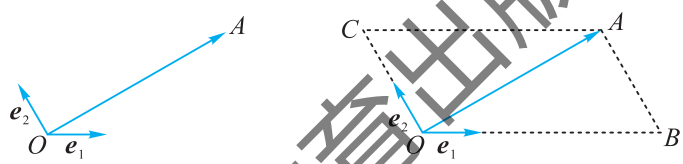
（2）实数 x，y 由 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 唯一决定. 也就是：

如果 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$，则 $x=x'$，$y=y'$.

我们称不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成平面上的一组**基** $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，分解式 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 中的系数 x，y 组成的有序数组 (x, y)，称为 $\boldsymbol{v}$ 在这组基下的**坐标**.

取定了平面上一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 之后，可以将平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$ 用它在这组基下的坐标来表示，记为 $\boldsymbol{v}=(x, y)$.

例 1 如图 1.4－2(1)，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $120°$ 的两个单位向量，$|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{3}$，且 $\langle\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{e}_1\rangle=30°$，$\langle\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{e}_2\rangle=90°$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标.



（1）　　　　　　（2）

图 1.4－2

解 如图 1.4－2(2)，作平行四边形 $OBAC$，则 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

因为 $\angle OAC=\angle AOB=30°$，$|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{3}$，

所以，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中，$|\overrightarrow{OC}|=2$，$|\overrightarrow{CA}|=4$.

所以 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{CA}|=4$，即 $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

因此 $\overrightarrow{OA}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标为 $(4, 2)$.

二　平面向量的正交分解与坐标表示

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的情形. 把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫作把向量**正交分解**.

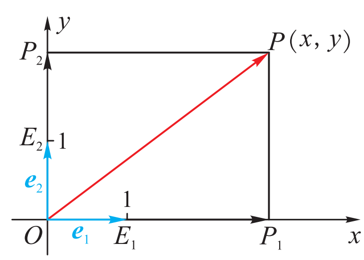


图 1.4－3

例 2 如图 1.4－3，设 $O(0, 0)$，$E_1(1, 0)$，$E_2(0, 1)$，$P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的 4 个点，且 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$. 求 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标.

解 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$ 分别是 x 轴和 y 轴上的单位

向量，并且相互垂直，因此不共线，则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成平面上的一组基.

在 x 轴上取与 $P(x, y)$ 横坐标相同的点 $P_1(x, 0)$，则 P_1P 与 y 轴平行或共线.

在 y 轴上取与 $P(x, y)$ 纵坐标相同的点 $P_2(0, y)$，则 P_2P 与 x 轴平行或共线.

因此

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}.$$

由 P_1，P_2 的坐标可知 $\overrightarrow{OP_1}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OP_2}=y\boldsymbol{e}_2$，

因此 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，即 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标为 (x, y).

平面上相互垂直的单位向量组成的基称为**标准正交基**，记作 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. 显然 $\boldsymbol{i}=(1, 0)$，$\boldsymbol{j}=(0, 1)$.

建立平面直角坐标系，若平面向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标是 (x, y)，我们视其为 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴、y 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 组成的基下的坐标，即 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OP}$，其中点 P 的坐标为 (x, y).

反过来，在平面上任取一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，取定一个原点 O，作 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，以有向直线 OE_1 为 x 轴，OE_2 为 y 轴，$|OE_1|=|OE_2|$ 为单位长度，建立平面直角坐标系，则任意一点 P 的坐标 (x, y) 就是向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标.

例 3 如图 1.4－4，设单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle=90°$，非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的模 $|\boldsymbol{v}|=r$，且 $\langle\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}\rangle=\alpha$. 求 $\boldsymbol{v}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标.

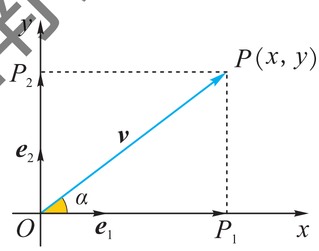


图 1.4－4

解 建立平面直角坐标系，其中 O 是原点，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的模为单位长度.

设 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$，则 $\boldsymbol{v}$ 的坐标就是点 P 的坐标 (x, y)，且 $|OP|=r$，$\alpha=\angle xOP$.

由角 α 的三角函数的定义可知

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \sin\alpha=\frac{y}{r},$$

从而

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha.$$

因此

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}=(r\cos\alpha, r\sin\alpha),$$

即 $\boldsymbol{v}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标为 $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$.

例 3 的结论可以作为公式来应用：

设单位向量 e_1，e_2 的夹角 $\langle e_1, e_2\rangle=90°$，非零向量 v 的模 $|v|=r$ 且 $\langle e_1, v\rangle=\alpha$，则

$$\boldsymbol{v}=(r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

例 4 如图 1.4－5，设$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$为一组标准正交基，用这组标准正交基分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出它们的坐标.

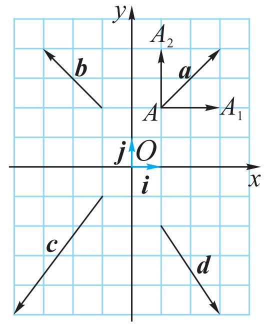


图 1.4－5

解 由图可知，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$.

所以 $\boldsymbol{a}=(2, 2)$.

同理
$$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}=(-2, 2),$$
$$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}=(-3, -4),$$
$$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(2, -3).$$

例 5 设$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$为一组标准正交基，已知$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{CD}=8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}$. 若$\overrightarrow{AD}=4\boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{a}$ 在基$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$下的坐标.

解 因为
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})+(4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+(8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j})\\&=15\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

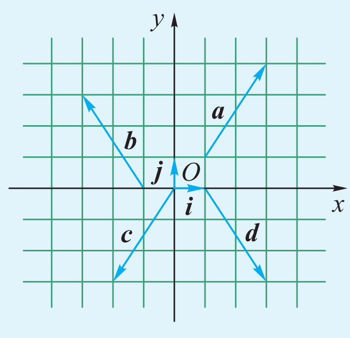
又 $\overrightarrow{AD}=4\boldsymbol{a}$，

所以 $\boldsymbol{a}=\dfrac{15}{4}\boldsymbol{i}-\dfrac{5}{2}\boldsymbol{j}$.

因此 $\boldsymbol{a}$ 在基$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$下的坐标为$\left(\dfrac{15}{4}, -\dfrac{5}{2}\right)$.

练习

1. 如图，设$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$为一组标准正交基，用这组标准正交基分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出它们的坐标.



（第 1 题）

2. 设$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$是平面内的一组基，$\boldsymbol{e}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{f}=4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

（1）试确定 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{f}$ 平行的充要条件；

（2）求 $3\boldsymbol{e}$ 在基$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$下的坐标.

1.4.2 向量线性运算的坐标表示

用坐标表示向量后，向量的和、差、数乘等线性运算又如何用坐标来表示呢?

如图 1.4-6，设$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$是一组标准正交基，向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$在基$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$下的坐标分别是$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}&=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

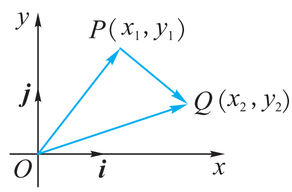


图 1.4-6

所以$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$的坐标为$(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}&=(x_1,\ y_1)-(x_2,\ y_2)\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})-(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1\boldsymbol{i}-x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}-y_2\boldsymbol{j})\\&=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$的坐标为$(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$.

又 $$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{OP}&=\lambda(x_1,\ y_1)\\&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\\&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

故$\lambda\overrightarrow{OP}$的坐标为$(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$.

由上可知，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}&=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),\\\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}&=(x_1,\ y_1)-(x_2,\ y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),\\\lambda\overrightarrow{OP}&=\lambda(x_1,\ y_1)=(\lambda x_1,\ \lambda y_1).\end{aligned}$$

于是，我们有

两个向量$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$的和(或差)的坐标等于这两个向量相应坐标的和(或差)，即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,\ y_1)\pm(x_2,\ y_2)=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2).$$

一个实数λ与向量$\boldsymbol{a}=(x,\ y)$的积的坐标等于这个数乘以向量相应的坐标，即

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x,\ y)=(\lambda x,\ \lambda y).$$

在图 1.4－6 中，由于$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$，因此$\overrightarrow{PQ}$的坐标为$(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

于是，我们有

> **在平面直角坐标系中，向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标等于终点Q的坐标$(x_2,\ y_2)$减去起点P的坐标$(x_1,\ y_1)$，即**
>
> $$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

根据起点和终点坐标写出向量坐标，就可以利用向量运算研究平面图形的性质.

例 6 如图 1.4－7，已知▱$ABCD$的三个顶点为$A(-1,\ 3)$，$B(-2,\ 1)$，$C(2,\ 2)$，求顶点D的坐标.

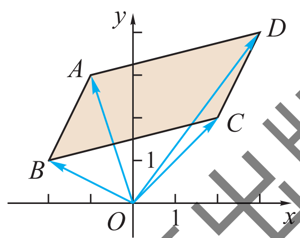


图 1.4－7

解 因为$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$=(-1,\ 3)+(2-(-2),\ 2-1)$

$=(-1,\ 3)+(4,\ 1)$

$=(3,\ 4)$.

所以点D的坐标是$(3,\ 4)$.

> 你能利用$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$求出点$D$的坐标吗？

例 7 如图 1.4－8，已知$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，P是直线P_1P_2上一点，且$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$（$\lambda\in\mathbf{R}$，且$\lambda\neq-1$），求点$P$的坐标.

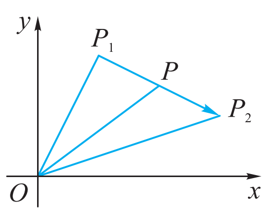


图 1.4－8

解 由题意可知，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P},\qquad ①$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{PP_2}.\qquad ②$$

①+λ×②得　　$(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}+\lambda\overrightarrow{OP_2}-\lambda\overrightarrow{PP_2}$.

又已知　　$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,

所以　　$(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$,

从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}\\&=\frac{(x_1,\ y_1)+\lambda(x_2,\ y_2)}{1+\lambda}\\&=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right).\end{aligned}$$

因此，点 P 的坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

特别地，当 $\lambda=1$ 时得到线段 P_1P_2 的中点坐标公式$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

向量$\overrightarrow{AB}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{CD}=(x_2,\ y_2)$平行(也就是共线)，可以直接用$(x_1,\ y_1)/\!/(x_2,\ y_2)$来表示．这意味着其中一个坐标是另一个坐标的实数倍，因此 $x_1y_2=y_1x_2$ 成立．即

$$(x_1,\ y_1)/\!/(x_2,\ y_2)\Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0.$$

例 8　已知 $A(2,\ 4)$，$B(4,\ 3)$，$C(-2,\ x)$三点共线，求 x 的值.

解　因为 A，B，C 三点共线，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线.

而　　$\overrightarrow{AB}=(4-2,\ 3-4)=(2,\ -1)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2-2,\ x-4)=(-4,\ x-4)$.

所以　　$2\times(x-4)-(-1)\times(-4)=0$,

整理得　　$2x=12$,

解得　　$x=6$.

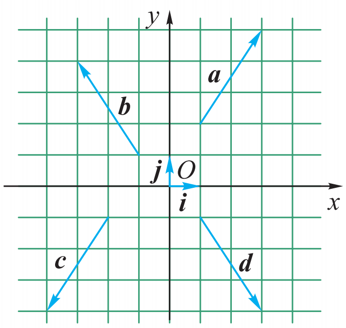
练习

1. 已知▱$ABCD$ 的三个顶点为 $A(1,\ 3)$，$B(-1,\ 1)$，$C(2,\ 2)$，求顶点 D 的坐标.
2. 求线段 AB 中点的坐标：
(1) $A(3,\ 1)$，$B(-2,\ 3)$；　　(2) $A(-6,\ -3)$，$B(4,\ -3)$.
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(-6,\ -8)$，$\boldsymbol{b}=(4,\ y)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 y 的值.
4. 已知点 $A(0,\ 1)$，$B(1,\ 0)$，$C(1,\ 2)$，$D(2,\ 1)$，求证：$AB/\!/CD$.

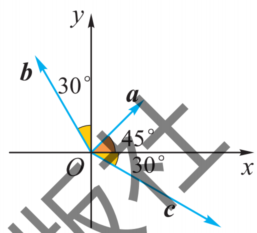
习题 1.4

学而时习之

1. 如图，设$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$为一组标准正交基，用这组标准正交基分别表示向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出它们的坐标.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的方向如图所示，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=4$，分别求它们的坐标.

3. 已知表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段$\overrightarrow{AB}$的起点A的坐标，求它的终点B的坐标.

(1) $\boldsymbol{a}=(-2,\ 3)$，$A(0,\ 0)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-2,\ -6)$，$A(-3,\ 4)$.

4. 已知▱$ABCD$的顶点为$A(-1,\ -2)$，$B(3,\ -1)$，$C(5,\ 6)$，求顶点D的坐标.

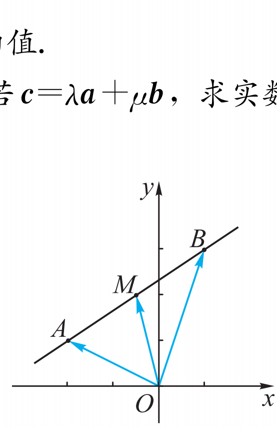
5. 若$A(1,\ 1)$，$B(2,\ -4)$，$C(x,\ -9)$三点共线，求x的值.

6. 已知向量$\boldsymbol{a}=(3,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ 1)$，$\boldsymbol{c}=(7,\ -4)$，若$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，求实数$\lambda$，$\mu$的值.

7. 如图，已知$A(-2,\ 1)$，$B(1,\ 3)$.

(1)求线段AB的中点M的坐标；

(2)若点P是线段AB的一个三等分点，求点P的坐标.



（第 7 题）

8. 已知点$A(-2,\ 3)$，$B(3,\ 5)$，分别求点A，B关于点$M(1,\ 1)$中心对称的点A'，B'的坐标，并说明$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

9. 已知点$A(-1,\ 1)$，$B(-4,\ 5)$，且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，求点$C$，$D$，$E$的坐标.

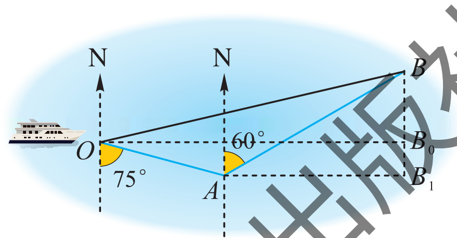
温故而知新

10. 已知点 $A(2, 3)$，$B(5, 4)$，$C(7, 10)$. 若点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，求 λ 为何值时，

(1) 点 P 在直线 $y=x$ 上；

(2) 点 P 在第四象限内.

11. 如图，一艘船从港口 O 出发往南偏东 75° 方向航行了 100 km 到达港口 A，然后往北偏东 60° 方向航行了 160 km 到达港口 B. 试用向量分解知识求从出发点 O 到港口 B 的直线距离（$\sin 15^\circ\approx0.258\,8$，结果精确到 0.1 km）.（提示：将 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$ 分解为垂直的两个向量.）



（第 11 题）

1.5 向量的数量积

向量最重要的特征是方向和大小．方向由角度描述，大小由长度描述，那么向量的长度和角度怎样计算呢？

1.5.1 数量积的定义及计算

一 数量积的物理背景

如图 1.5－1，一辆小车在拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生了位移 $\boldsymbol{s}$．若拉力的大小为 F N，其方向与小车位移方向的夹角为 α，位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小为 s m．如何计算拉力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W？

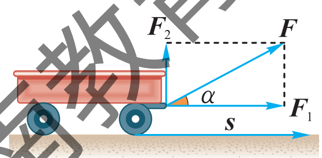


图 1.5－1

由于拉力 $\boldsymbol{F}$ 与小车位移 $\boldsymbol{s}$ 都是向量，则可用从同一点出发的两条有向线段表示．两条有向线段的夹角 α 就是这两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角．有向线段的长度分别等于这两个向量的大小 $|\boldsymbol{F}|=F$，$|\boldsymbol{s}|=s$．

若拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 方向相同，则功等于力的大小和位移大小的乘积，即

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|=Fs.$$

一般情形下，功 W 不等于力的大小和位移大小的乘积，但仍是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量的某种类型的乘积，记作 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$．

由力学知识知道，$\boldsymbol{F}$ 可分解为水平和垂直两个方向的分力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 之和，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$．合力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 等于各分力所做的功之和：

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{s}.$$

这说明这种乘积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$ 满足对向量加法的分配律．

由力学知识还知道，与位移 $\boldsymbol{s}$ 垂直的力 $\boldsymbol{F}_2$ 做的功 $\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{s}=0$．因此

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{s}.$$

也就是说，合力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 W 等于水平分力 $\boldsymbol{F}_1$ 做的功.

当 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{s}$ 方向相同，$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|$. 由图 1.5－1 知 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\cos\alpha$，因而

$$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha.$$

当 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ 时，$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{s}$ 方向相反，$W=-|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|$，其中 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}||\cos\alpha|$，$\cos\alpha=-|\cos\alpha|<0$，因而

$$W=-|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|=-|\boldsymbol{F}||\cos\alpha||\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha.$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$W=0$，$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{0}$，$\cos\alpha=0$，因而 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha$ 仍成立.

综上所述，在所有情形下都有 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha$.

二　数量积的定义

运用力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 来计算功 W 的公式 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha$，可以推广到任意两个向量.

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是它们的夹角，则定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**.

由平面向量夹角的定义可知，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\alpha$ 的取值范围为 $[0,\pi]$.

由数量积的定义可知：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{b}|=0 \text{ 或 } \cos\alpha=0.$$

（1）当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均不为 $\boldsymbol{0}$ 时，如图 1.5－2.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

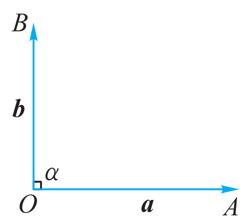


图 1.5－2

（2）当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，由于零向量与任意向量垂直，因而仍有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

因此，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 对所有情形均成立.

对比向量的线性运算可得，向量线性运算的结果是一个向量，而两个向量的数量积是一个实数，这个实数可以是正数、负数或零. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是正数还是负数完全由 $\cos\alpha$ 决定.

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，求数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解　当 a，b 同号，即 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|a||b|=ab.$$

当 a，b 异号，即 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\pi=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=-|a||b|=ab.$$

当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0=ab$.

因此，在所有情况下都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab$.

上例说明：对于共线的两个向量，将其写成同一个单位向量的实数倍后，这两个向量的数量积等于它们对应的实数的乘积.

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=12$，$|\boldsymbol{b}|=9$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54\sqrt{2}$. 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 由数量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-54\sqrt{2}}{12\times9}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

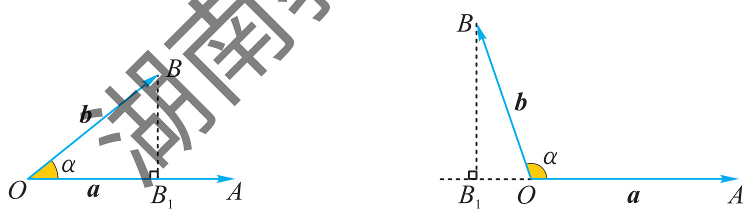
因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

三 投影

如图 1.5－3，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，两个向量的夹角为 α，过点 B 作 $BB_1\perp OA$ 于点 B_1，则

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1B},$$

其中 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 共线.



（1）　（2）

图 1.5－3

我们把 $\overrightarrow{OB_1}$ 称为 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的**投影向量**，投影向量的长度 $|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB}||\cos\alpha|$ 称为**投影长**.

设 $\boldsymbol{e}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的单位向量，则 $\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OB_1}=\pm|\overrightarrow{OB_1}|\boldsymbol{e}$.

当 $0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，即 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 同向时，

$$\overrightarrow{OB_1}=|\overrightarrow{OB_1}|\boldsymbol{e}=(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}.$$

当 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$，即 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 反向时，

$$\overrightarrow{OB_1}=-|\overrightarrow{OB_1}|\boldsymbol{e}=(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}.$$

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\overrightarrow{OB_1}=\boldsymbol{0}$ 时，

$$\overrightarrow{OB_1}=(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}.$$

在所有情况下都有$\overrightarrow{OB_1}=(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}$.

$|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$ 刻画了投影向量的大小和方向，称为$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的**投影**.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_1}&=|\overrightarrow{OA}|\boldsymbol{e}\cdot(|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha)\boldsymbol{e}\\&=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

由于$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB_1}$共线，于是$|\overrightarrow{OB_1}|=\dfrac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}$.

一般地，**$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 的乘积，或 $\boldsymbol{b}$ 的长度 $|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$ 的乘积.**

由此得到利用数量积计算 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\alpha$ 的公式：

$$|\boldsymbol{b}|\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

四 数量积的运算律

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是任意向量，λ 是任意实数，则如下运算律成立：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) **与数乘的结合律**：$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

(3) **分配律**：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

由数量积的定义可以直接证明运算律(1)(2). 下面我们证明运算律(3).

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中存在零向量，易知等式成立.

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都为非零向量，如图 1.5－4，以 O 为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的终点 B，C 在 OA 或其延长线上的投影分别为点 B'，C'，记 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角分别为 θ_1，θ_2，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ.

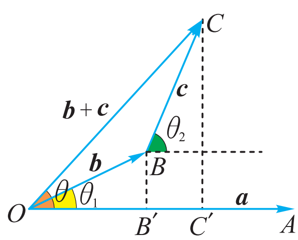


图 1.5－4

由于点 O，A，B'，C'在同一直线上，

且$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C'}$，

因此 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影等于 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影之和，即

$$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2.$$

上式的两边同乘 $|\boldsymbol{a}|$，得

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_2,$$

即
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

例 3 求证：菱形的两条对角线互相垂直.

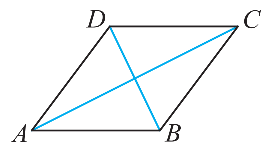


图 1.5－5

已知：如图 1.5－5，四边形 $ABCD$ 是菱形.

求证：$AC\perp BD$.

证明 记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，

则对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

因为
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\\&=|AB|^2-|AD|^2\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $AC\perp DB$.

向量等式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$ 的推导过程与实数的乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 相同，都是用同样的运算律做恒等变形.

思考：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 成立吗？如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得到什么等式？作出向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，你得到的等式代表的几何意义是什么？

练习

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足下列条件时，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$；　　(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$；　　(4) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 的值，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角大小.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=8$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=16$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-36$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=36$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=6$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，求：

(1) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影；

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影.

4. 运用数量积知识证明下列几何命题：

(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，则 $CA^2+CB^2=AB^2$；

(2) 在矩形 $ABCD$ 中，$AC=BD$.

1.5.2 数量积的坐标表示及其计算

一 数量积的坐标表示

向量的坐标是向量分解式中的系数. 根据数量积的运算律，很容易由向量坐标算出数量积.

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是相互垂直的单位向量，组成平面上的一组基，则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$.

设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在这组基下的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)\\&=x_1x_2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)+x_1y_2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)+y_1x_2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)+y_1y_2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

于是可得两个向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ 的数量积的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=x_1x_2+y_1y_2.$$

二 计算公式

向量的长度

向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$ 与自身的夹角为 0，因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

于是得到计算向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$ 的模(即长度)的公式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

夹角余弦值

根据两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ 数量积的定义，得到计算两向量夹角余弦值的公式为

$$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}}.$$

垂直条件

已知向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

两个向量的数量积是否为零，是判断相应的两条线段或直线是否垂直的重要方法之一.

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=(3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\ k\right)$，求 k 为何值时：

（1）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

（3）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角.

解 （1）因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，

所以 $3k-1\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$.

（2）因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

所以 $3\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1\times k=0$，解得 $k=\dfrac{9}{2}$.

（3）因为 $\dfrac{\pi}{2}<\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle<\pi$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle<0$，

则由向量夹角余弦公式可得

$$3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1\times k=-\frac{9}{2}+k<0,$$

解得 $k<\dfrac{9}{2}$.

由(1)知，$k=-\dfrac{1}{2}$时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，此时$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\pi$.

所以 $k<\dfrac{9}{2}$ 且 $k\neq-\dfrac{1}{2}$时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角.

例 5 如图 1.5-6，已知点 O 为平面直角坐标系的原点，点 A 的坐标为(12，8)，点 B 的坐标为(−4，12)，作 $BD\perp OA$，垂足为点 D.

（1）求$|OA|$，$|OB|$，$|AB|$；

（2）求 $\cos\angle AOB$；

（3）将 OA 绕点 O 逆时针旋转 $90°$到 OA'，求点 A'的坐标；

（4）求$|BD|$；

（5）求 $S_{\triangle OAB}$.

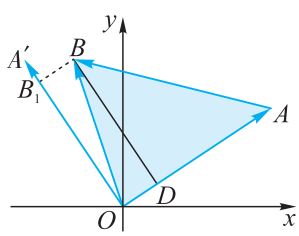


图 1.5-6

解 （1）由 $\overrightarrow{OA}=(12,\ 8)$，$\overrightarrow{OB}=(-4,\ 12)$，得

$$\overrightarrow{AB}=(-4-12,\ 12-8)=(-16,\ 4),$$

因此 $$|OA|=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13},$$

$$|OB|=\sqrt{(-4)^2+12^2}=4\sqrt{10},\ |AB|=\sqrt{(-16)^2+4^2}=4\sqrt{17}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(12,\ 8)\cdot(-4,\ 12)$

$$=12\times(-4)+8\times12=48,$$

所以

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{48}{4\sqrt{13}\times4\sqrt{10}}=\frac{3}{130}\sqrt{130}.$$

(3) 记 $|\overrightarrow{OA}|=r$，$\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正方向的夹角为 α，则

$$\overrightarrow{OA}=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha),$$

$$\overrightarrow{OA'}=\left(r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\ r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)=(-r\sin\alpha,\ r\cos\alpha).$$

由于点 A 的坐标为 $(12,\ 8)$，那么 $r\cos\alpha=12$，$r\sin\alpha=8$.

因此 $\overrightarrow{OA'}=(-8,\ 12)$，即点 A' 的坐标为 $(-8,\ 12)$.

(4) 将向量 $\overrightarrow{OB}$ 投影到 $\overrightarrow{OA'}$ 上，得到投影向量 $\overrightarrow{OB_1}$，则

$$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{BD}|.$$

而 $|\overrightarrow{OB_1}|$ 就是 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA'}$ 方向上的投影 $|\overrightarrow{OB}|\cos\angle A'OB$ 的绝对值，则

$$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{OB_1}|=\frac{|\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA'}|}=\frac{|(-8)\times(-4)+12\times12|}{\sqrt{(-8)^2+12^2}}=\frac{176}{4\sqrt{13}}=\frac{44}{13}\sqrt{13}.$$

一般地，设向量 $\overrightarrow{PQ}=(x,\ y)$ 在非零向量 $\boldsymbol{a}=(a,\ b)$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{P_1Q_1}$，则投影长为

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}|=\frac{|(a,\ b)\cdot(x,\ y)|}{|(a,\ b)|}=\frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(5) (方法一) $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA||BD|$

$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{13}\times\frac{44}{13}\sqrt{13}=88.$$

(方法二) $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA||BD|$

$$=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin(90^\circ-\angle BOA')$$

$$=\frac{1}{2}|OA'||OB|\cos\angle BOA'$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{1}{2}(-8,\ 12)\cdot(-4,\ 12)$$

$$=88.$$

练 习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 4)$，求：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 2)$，则当实数 k 为何值时：

(1) $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 垂直？

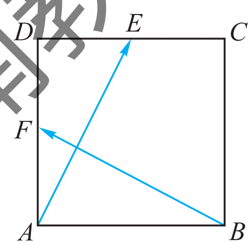
(2) $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行？

3. 在△ABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ k)$，且△$ABC$ 是直角三角形，求 k 的值及△ABC 的面积.

习题 1.5

学而时习之

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，F 为 AD 的中点，求 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值.



（第 1 题）

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，且 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|$；

(3) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

3. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

4. 在平面直角坐标系 xOy 内，已知模长为 4 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴、y 轴正方向的夹角分别为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{6}$，求 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、y 轴正方向上的投影.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) $\boldsymbol{a}=(5,\ 6)$，$\boldsymbol{b}=(-5,\ 3)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(-3,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ 2)$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,-2)$，分别求下列各式的值：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　　(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,0)$，$\boldsymbol{b}=(k,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{3\pi}{4}$，求实数 k 的值.

8. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$，$\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$，若$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，求实数 λ 的值.

9. 已知$\overrightarrow{OA}=(-1,8)$，$\overrightarrow{OB}=(-4,1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,3)$.

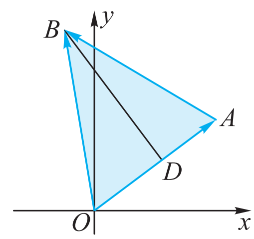
求证：$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

10. 如图，已知点 O 为平面直角坐标系的原点，点 A 的坐标为$(4,3)$，点 B 的坐标为$(-1,6)$，作 $BD\perp OA$，垂足为点 D.

(1) 求$|OA|$，$|OB|$，$|AB|$；

(2) 求 $\cos\angle AOB$；

(3) 求 $S_{\triangle OAB}$.



（第 10 题）

温故而知新

11. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，求实数 k 为何值时：

(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 平行；　　(2) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直.

12. 设 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是夹角为$\dfrac{\pi}{3}$的单位向量，若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$，求$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$. 从中你发现了什么？

14. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{2}$. 若向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，求$|\boldsymbol{b}|$.

1.6 解三角形

在初中，我们借助锐角三角函数的有关知识解决了一些有关直角三角形的问题.在实际生活中，我们往往更多遇到的是有关斜三角形的问题，那么如何求解呢？

三条边和三个内角是三角形最基本的六个元素，通常只要知道了三个元素(其中至少包括一条边)就可以求出其余三个未知元素. 这种从已知三角形的某些元素出发求这个三角形其他元素的过程叫作**解三角形**.

1.6.1 余弦定理

我们知道，由边角边定理可证明两个三角形全等，也就是由两边及其夹角即可完全确定一个三角形. 三角形确定后，若夹角为直角，则由勾股定理可求第三边的长，若夹角不为直角，如何求第三边呢？

如图 1.6－1，已知△ABC 的两边 $CB=a$，$CA=b$ 以及两边夹角∠C，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

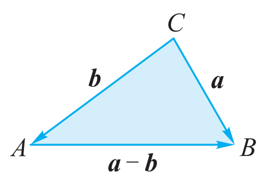


图 1.6－1

又 $|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$

$$=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=a^2-2ab\cos C+b^2.$$

令 $|\overrightarrow{AB}|=c$，则

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C, \qquad ①$$

因此

$$c=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

将①式中的角 C 依次换成另外两个角后，同理可得如下两个等式：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \qquad ②$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \qquad ③$$

于是得到以下定理：

余弦定理 三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍．即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

当$\angle C$是直角时，向量等式$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$中的$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，等式变为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，这就是勾股定理．由此可知，余弦定理可以看作是勾股定理的推广．

余弦定理揭示了任意三角形边角之间的关系，是一个解决三角形问题的重要工具．在实际应用中，有时可将余弦定理写成下面的形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

利用上述公式就可由三角形的三条边计算出三角形的三个内角．

例 1 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$\angle C=45°$，求c和$\angle A$.

解 由余弦定理得

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=(\sqrt{6})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=4,\end{aligned}$$

所以$c=2$.

再由余弦定理可得

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\frac{(1+\sqrt{3})^2+4-6}{2(1+\sqrt{3})\times 2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因为$\angle A$是三角形的内角，所以$\angle A=60°$.

例 2 如图 1.6-2，在△ABC 中，$\angle A=60°$，$a=7$，$c=5$，求△ABC 的面积.

解 由已知条件，并根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得

$$7^2=b^2+25-2b\times5\times\frac{1}{2},$$

整理得 $$b^2-5b-24=0.$$

解得 $$b=8 \text{ 或 } b=-3(\text{舍去}).$$

作 AC 边上的高 BD，则

$$BD=5\sin 60°=\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times8\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

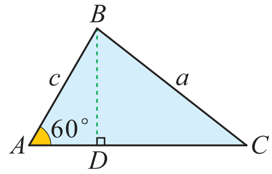


图 1.6-2

例 3 已知△ABC 的三边分别为 $a=6$，$b=10$ 和 $c=14$，试求△ABC 最大内角的度数.

解 根据三角形中大边对大角的原理可知，$\angle C$ 是△ABC 的最大内角.

由余弦定理得

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{6^2+10^2-14^2}{2\times6\times10}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因为$\angle C$ 是三角形的内角，所以$\angle C=120°$.

因此△ABC 的最大内角为 $120°$.

练 习

1. 在△ABC 中，

(1) 已知 $b=8$，$c=3$，$\angle A=60°$，求 a；

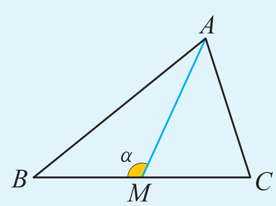
(2) 已知 $a=7$，$b=3$，$c=5$，求$\angle A$；

(3) 已知 $a=20$，$b=29$，$c=21$，求$\angle B$.

2. 在△ABC 中，a，b，c 分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，若$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，求$\angle B$.

3. 如图，已知 AM 是△ABC 中 BC 边上的中线.

求证：$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.



（第 3 题）

1.6.2 正弦定理

在解三角形时，我们有时还要探讨任意三角形的三条边与对应角的正弦之间的关系.

设 a，b，c 分别为$\triangle ABC$的内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边.

若$\triangle ABC$为直角三角形，且$\angle C=90°$，如图 1.6-3，则根据锐角三角函数中正弦函数的定义，有 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，由此得到 $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

又 $\sin C=1$，从而我们有下述结论：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

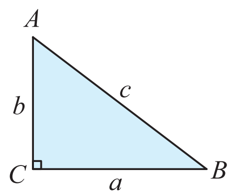


图 1.6-3

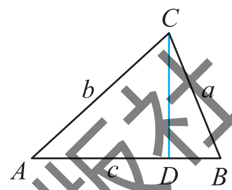


图 1.6-4

若$\triangle ABC$为锐角三角形，如图 1.6-4，设 CD 为 AB 边上的高，则 $CD=b\sin A$.

于是，$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}bc\sin A$.

同理可得

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB.$$

因此

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB,$$

即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin\angle ACB}.$$

若$\triangle ABC$为钝角三角形，也可类似得到上述结论.

综上可得以下定理：

正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比值相等. 即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

在解决问题的过程中，还得到了 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$ 这一面积计算公式.

正弦定理早在公元 150 年左右，被古希腊科学家托勒密所知晓. 在 10 世纪，阿布·瓦法重新发现并证明了该定理.

例 4 如图 1.6－5，已知△ABC，作正方形 $ADEB$，$BFGC$，$CHIA$.

求证：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AID}=S_{\triangle BEF}=S_{\triangle CGH}$.

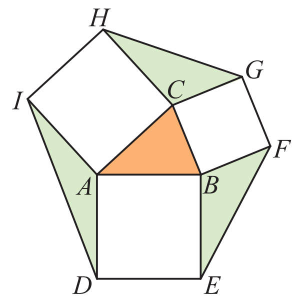


图 1.6－5

证明 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle CAB$

$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin(180^\circ-\angle CAB)$.

又 $AB=AD$，$AC=AI$，$\angle IAD+\angle CAB=180^\circ$，

因而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot AI\sin\angle IAD=S_{\triangle AID}$.

同理可证 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BEF}$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CGH}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AID}=S_{\triangle BEF}=S_{\triangle CGH}$.

例 5 已知△ABC 中，$c=4$，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，求 a，b.

解 由题意可得$\angle C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$.

由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$.

又 $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

于是 $a=\frac{4\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=4\sqrt{3}-4$.

同理可得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{4\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$.

例 6 在△ABC 中，分别求下列条件下的$\angle C$ 和 c.

（1）$a=5$，$b=5\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$；

（2）$a=5$，$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$\angle A=45^\circ$.

解 （1）由正弦定理得$\frac{5\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{5}{\sin 30^\circ}$，

即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle B=60^\circ$ 或 $\angle B=120^\circ$.

当$\angle B=60^\circ$时，$\angle C=90^\circ$，

所以 $c=\sin 90^\circ\cdot\frac{5}{\sin 30^\circ}=10$.

当$\angle B=120^\circ$时，$\angle C=30^\circ$，

所以 $$c=a=5.$$

(2) 由正弦定理得 $\sin B=\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{5}=\frac{1}{2}$,

所以 $$\angle B=30^\circ\text{或}\angle B=150^\circ.$$

又 $$\angle A=45^\circ,\ a>b,$$

所以 $$\angle B<45^\circ.$$

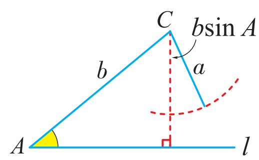
由此得到 $\angle B=30^\circ$，$\angle C=105^\circ$.

因此 $$c=\sin 105^\circ\cdot\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{5\sqrt{3}+5}{2}.$$

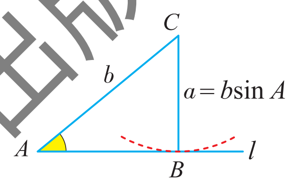
由例 6 可以发现，已知两边 a，b 和其中一边的对角 $\angle A$ 解三角形时，会出现两解的情况，还会出现其他情况吗？

我们以点 C 为圆心，以边长 a 为半径画弧，则此弧与除去顶点 A 的射线 l 的公共点个数即为三角形解的个数.

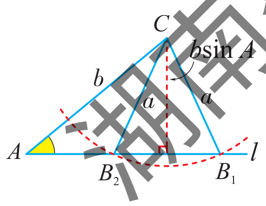
图 1.6－6 是 $\angle A$ 为锐角时的示意图，此时三角形解的个数有四种情况.



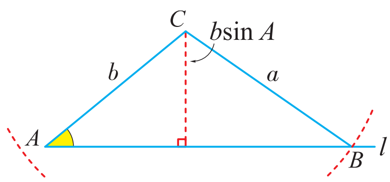
$a<b\sin A$，无解



$a=b\sin A$，一解



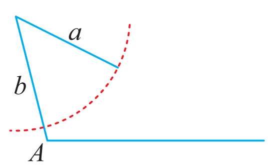
$b\sin A<a<b$，两解



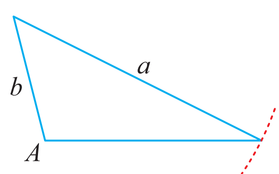
$a\geqslant b$，一解

图 1.6－6

图 1.6－7 是 $\angle A$ 为钝角时的示意图，此时三角形解的个数有两种情况.



$a\leqslant b$，无解



$a>b$，一解

图 1.6－7

练 习

1. 在$\triangle ABC$中，

(1) 若$c=5$，$\angle C=30^\circ$，$\angle A=45^\circ$，则$a=$________；

(2) 若$c=10\sqrt{3}$，$\angle B=45^\circ$，$\angle A=75^\circ$，则$b=$________.

2. 在$\triangle ABC$中，

(1) 若$a=1$，$b=\sqrt{2}$，$\angle A=30^\circ$，则$\angle B=$________；

(2) 若$b=10\sqrt{2}$，$c=10\sqrt{3}$，$\angle C=60^\circ$，则$\angle B=$________.

3. 在梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，且$AB=5$，$AC=9$，$\angle BCA=30^\circ$，$\angle ADB=45^\circ$，求BD的长.

由正弦定理可知，三角形各边与它所对角的正弦的比值相等，那么这个比值的几何意义是什么？

设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，外接圆的半径为R.

(1) 若$\triangle ABC$为直角三角形，设$\angle C=90^\circ$，则$c=2R$.

又 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=1$，于是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R. \qquad ①$$

(2) 若$\triangle ABC$为锐角三角形，如图 1.6－8，则点O在$\triangle ABC$内.

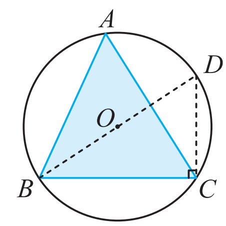


图 1.6－8

过B，O作直径BD，连接CD，则$\angle DCB=90^\circ$，$BD=2R$，$\angle D=\angle A$(为什么?).

在$\text{Rt}\triangle BCD$中，$BC=BD\sin D=BD\sin A$，由此得到$a=2R\sin A$.

类似可证$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，于是仍可得①式.

(3) 若$\triangle ABC$为钝角三角形，如图 1.6－9，设$\angle B>90^\circ$，则点O在$\triangle ABC$外.

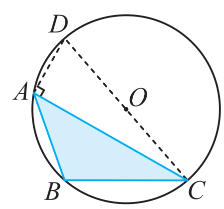


图 1.6－9

过C，O作直径CD，连接AD，则$\angle DAC=90^\circ$，$CD=2R$，$\angle D=180^\circ-\angle B$(为什么?).

在$\text{Rt}\triangle ADC$中，$AC=CD\sin D=CD\sin(180^\circ-\angle B)=CD\sin B$，即$b=2R\sin B$.

类似可证$a=2R\sin A$，$c=2R\sin C$，于是仍可得①式.

综上可知，对于任意三角形，①式均成立，这个结果称为**扩充的正弦定理**，这表明三角形各边与它所对角的正弦的比值为一个常数，这个常数等于该三角形外接圆的直径.

例 7 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解 设$\triangle ABC$的外接圆的半径为R，则由扩充的正弦定理可得

$$a=2R\sin A，b=2R\sin B，c=2R\sin C.$$

将其代入$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$得

$$\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}=\frac{2R\sin C}{\cos C},$$

即

$$\tan A=\tan B=\tan C.$$

又角$A，B，C\in(0，\pi)$，

所以$\angle A=\angle B=\angle C$，因而$\triangle ABC$为等边三角形.

例 8 设R是$\triangle ABC$的外接圆的半径，S是$\triangle ABC$的面积，求证：

（1）$S=\dfrac{abc}{4R}$；

（2）$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

证明 （1）由扩充的正弦定理得$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

所以

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}.$$

（2）由$a=2R\sin A，b=2R\sin B$，得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

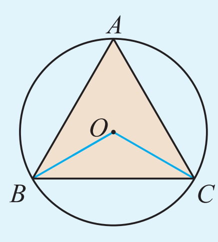
练习

1. （1）已知$c=\sqrt{2}$，$\angle A=75°$，$\angle B=60°$，求$\triangle ABC$的外接圆半径；

（2）已知$\angle B=30°$，$\triangle ABC$的外接圆半径$R=1$，求b.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$b+c=\sqrt{2}+1$，$\angle B=30°$，三角形外接圆的面积为π，求$\angle C$.

3. 如图，已知$\odot O$的半径为R，$\triangle ABC$为其内接等边三角形，求$\triangle ABC$的边长和$\triangle OBC$的外接圆半径.



（第 3 题）

1.6.3 解三角形应用举例

在解决一些与三角形有关的实际问题时，正弦定理及余弦定理起着非常重要的作用．下面分别举例说明．

例 9 如图 1.6－10，货轮在海上以 40 km/h 的速度沿着南偏东 40°的方向航行，货轮在 B 点观测灯塔 A 在其南偏东 70°的方向上，航行半小时到达 C 点，此时观测灯塔 A 在其北偏东 65°的方向上．求 C 点与灯塔 A 的距离．

解 在$\triangle ABC$ 中，$BC=40\times\frac{1}{2}=20(\text{km})$，

$$\angle ABC=70^\circ-40^\circ=30^\circ,$$

$$\angle ACB=40^\circ+65^\circ=105^\circ,$$

所以 $\angle A=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$．

由正弦定理得

$$AC=\frac{BC\sin\angle ABC}{\sin A}=\frac{20\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=10\sqrt{2}(\text{km}).$$

因此，C 点与灯塔 A 的距离是 $10\sqrt{2}$ km.

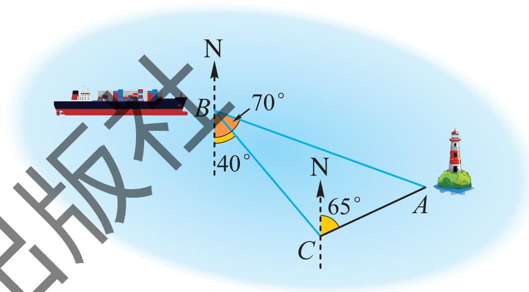


图 1.6－10

例 10 如图 1.6－11，有一段河流，河的一侧是以 O 为圆心，半径为 $10\sqrt{3}$ m 的扇形区域 OCD，河的另一侧是一段笔直的河岸 l．河边有一烟囱 AB(不计 B 离河岸的距离)，且 OB 的连线恰好与河岸 l 垂直，设 OB 与圆弧 CD 的交点为 E．已知扇形区域和河岸处于同一水平面，在点 C，点 O 和点 E 处测得烟囱 AB 顶端的仰角分别为 45°，30°和 60°．

(1) 求烟囱 AB 的高度；

(2) 如果要在 CE 间修一条直路，求 CE 的长．

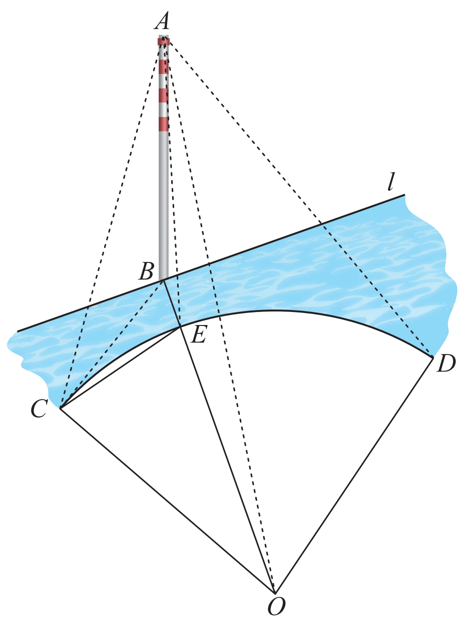


图 1.6－11

解 (1) 设烟囱 AB 的高度为 h m.

因为$\angle AOB=30^\circ$，$\angle AEB=60^\circ$，$\angle ABO=90^\circ$，

所以 $OB=\sqrt{3}h$ m，$EB=\frac{\sqrt{3}}{3}h$ m.

又 $OE=10\sqrt{3}$ m，所以$\sqrt{3}h-\frac{\sqrt{3}h}{3}=10\sqrt{3}$，解得 $h=15$.

因此烟囱的高度为 15 m.

（2）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，

所以$CB=AB=15$ m.

由（1）知，$OB=15\sqrt{3}$ m.

在$\triangle OBC$中，$\cos\angle COB=\dfrac{OC^2+OB^2-BC^2}{2OC\cdot OB}$

$$=\frac{300+225\times3-225}{2\times10\sqrt{3}\times15\sqrt{3}}=\frac{5}{6},$$

所以在$\triangle OCE$中，$CE^2=OC^2+OE^2-2OC\cdot OE\cos\angle COE$

$$=300+300-600\times\frac{5}{6}=100.$$

因此CE的长为10 m.

例 11 一颗人造地球卫星在地球上空1 600 km处沿着圆形的轨道运行，每2 h沿轨道绕地球旋转一圈. 假设卫星于中午12点正通过卫星跟踪站A点的正上空，地球半径约为6 400 km.

（1）求人造卫星与卫星跟踪站在12:03时相隔的距离是多少.

（2）如果此时跟踪站天线指向人造卫星，那么天线瞄准的方向与水平线的夹角的余弦值是多少?（参考数据：$\cos 9^\circ\approx0.988$，$\sin 9^\circ\approx0.156$）

解　（1）如图1.6－12，设人造卫星在12:03时位于C点，其中$\angle AOC=\beta$，则$\beta=360^\circ\times\dfrac{3}{120}=9^\circ$.

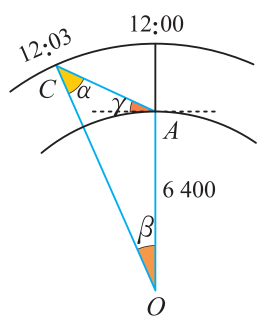


图 1.6－12

在$\triangle ACO$中，$OA=6\ 400$ km，$OC=6\ 400+1\ 600=8\ 000$(km)，$\beta=9^\circ$，由余弦定理得

$$AC^2=6\ 400^2+8\ 000^2-2\times6\ 400\times8\ 000\cos 9^\circ\approx3.79\times10^6.$$

解得　　$AC\approx1.95\times10^3$.

因此，在12:03时，人造卫星与跟踪站相距约1 950 km.

（2）如图1.6－12，设此时天线的瞄准方向与水平线的夹角为γ，则

$$\angle CAO=\gamma+90^\circ.$$

由正弦定理得　　$\dfrac{\sin 9^\circ}{1\ 950}=\dfrac{\sin(\gamma+90^\circ)}{8\ 000}$.

故$\sin(\gamma+90^\circ)=\dfrac{8\ 000}{1\ 950}\sin 9^\circ\approx0.64$，即$\cos\gamma\approx0.64$.

因此，天线瞄准方向与水平线的夹角的余弦值约为0.64.

通过上述例子，我们发现，在运用解三角形的知识解决实际问题时，通常都应根据题意将实际问题转化为解三角形的问题，从中抽象出一个或几个三角形，然后解这些三角形，得出所要求的量，经检验后得到实际问题的解．其基本步骤如图1.6－13所示．

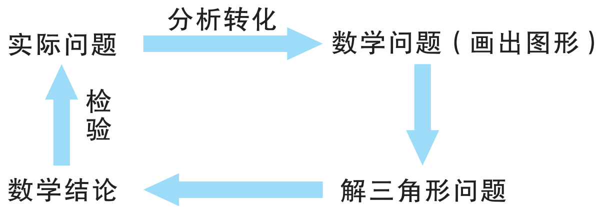
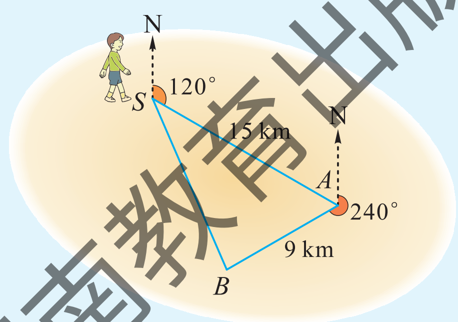


图1.6－13

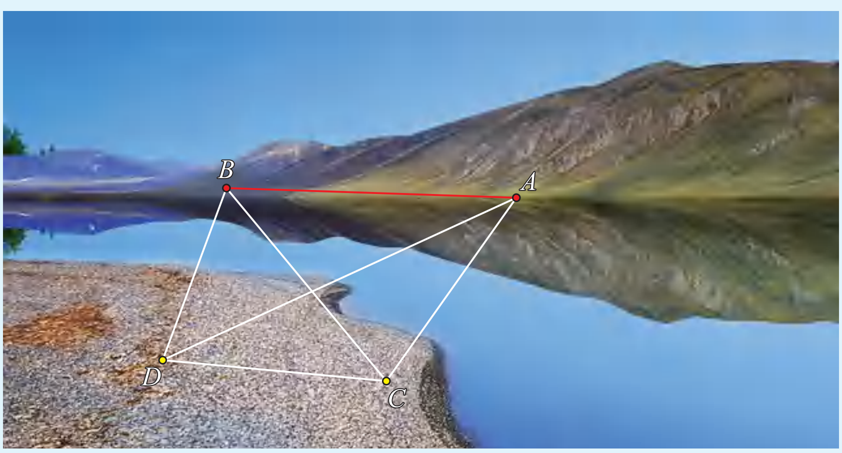
练习

1. 如图，在一次定向越野中，一名学员离开出发点 S 后沿南偏东 60° 方向走了15 km到达 A 点，即第一个检查点．从 A 点他又沿南偏西 60° 方向走了9 km到达第二个检查点(B 点)．从 B 点他直接返回 S 点．试描述这名学员从 B 点到 S 点的位移($\sin 36.6^\circ \approx 0.596$，$\cos 36.6^\circ \approx 0.803$)．



（第1题）

2. 如图，为测量河对岸 A，B 两点的距离，在河的这边取 C，D 两点观察，测得 $CD=\sqrt{3}$ km，$\angle ADB=45^\circ$，$\angle ADC=30^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$，$\angle DCB=45^\circ$(A，B，C，D 在同一平面内)，求 A，B 两点之间的距离．



（第2题）

习题 1.6

学而时习之

1. 已知△ABC 中，$a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{37}$，求∠C 的大小.

2. 已知△ABC 的三边之比为$\sqrt{7}:2:1$，求最大内角的度数.

3. 用余弦定理证明：在△ABC 中，当∠C 为锐角时，$a^2+b^2>c^2$；当∠C 为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

4. 已知△ABC 中，

(1) 若 $a=3$，$b=2\sqrt{3}$，∠$B=150°$，求 c；

(2) 若 $a=8$，$b=4\sqrt{6}$，∠$B=60°$，求 c；

(3) 若 $a=7$，∠$B=30°$，∠$C=120°$，求 c；

(4) 若 $a=14$，$b=7\sqrt{6}$，∠$A=45°$，求∠C.

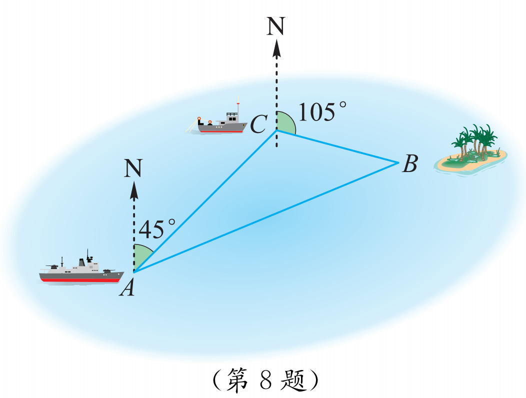
5. 在△ABC 中，$a=3$，$c=3\sqrt{3}$，∠$A=30°$，解这个三角形，并求△ABC 的面积.

6. 在△ABC 中，$a+c=6$，$b=2$，$\cos B=\frac{7}{9}$，求 a，c 的值.

7. 在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 所对的边，且 $b^2+c^2-a^2=bc$.

(1) 求∠A 的大小；　　　　(2) 若 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，求∠B 的大小.

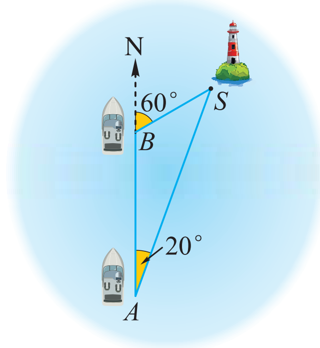
8. 如图，一艘渔轮在航行中遇险并发出呼救信号. 我海军舰艇在 A 处获悉后，测出该渔轮在方位角①为 45°、距离为 10 n mile 的 C 处，并测得渔轮正沿方位角为 105°的方向，以 9 n mile/h 的速度向小岛靠拢. 我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救，求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间(角度精确到 0.1°，时间精确到 1 min，$\sin 21.8°\approx\frac{3\sqrt{13}}{14}$).



(第 8 题)

① 方位角是以某点的正北方向为标准线，将标准线绕该点沿顺时针方向旋转到目标点所成的角.

9. 如图，一艘船以 32.2 n mile/h 的速度向正北航行，在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 20° 方向上，30 min 后航行到 B 处，在 B 处看灯塔 S 在船的北偏东 60° 方向上，求灯塔 S 到 B 处的距离（结果精确到0.1 n mile，参考数据：$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\sin 40^\circ \approx 0.643$）.

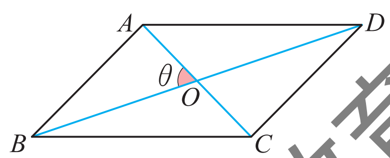


（第 9 题）

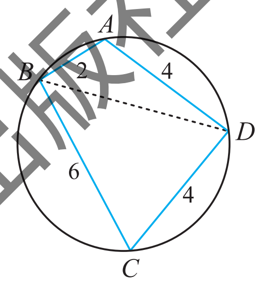
温故而知新

10. 已知△ABC 中，$a\cos B = b\cos A$，试判断此三角形的形状.

11. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 两邻边长为 a 和 b（$a<b$），两对角线的一个交角为 θ（$0^\circ<\theta<90^\circ$），求该平行四边形的面积.



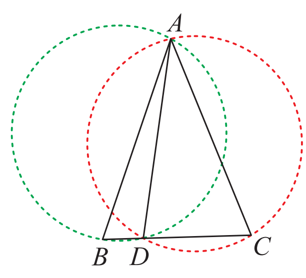
（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.（提示：连接 BD.）

13. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，分别作△ABD 和△ACD 的外接圆. 试比较两个外接圆的大小，并说明理由.



（第 13 题）

14. （数学探究活动）（1）用长度分别为 2，3，4，5，6 的细木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），求能够得到的三角形面积的最大值与最小值；

（2）若用 $n(n\geq 4)$ 条长度分别为 a_1，a_2，…，a_n 的细木棒围成三角形，你能发现三角形面积的变化规律吗？写出从中发现的两条规律.

1.7 平面向量的应用举例

向量是沟通几何与代数的桥梁，是实现几何问题与代数问题相互转化的强有力的工具．向量不仅可以在解决数学问题中发挥重要作用，其在物理学及其他科学领域中也有着广泛的应用．

例 1 如图 1.7－1，△ABC 是等边三角形，边长为 2，P 是平面上任意一点．求$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值．

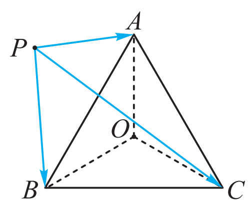


图 1.7－1

解 取等边△ABC 的中心 O.

记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{OP}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

又 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{s}$，

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{s}$，

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{s})\cdot(-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{s})\\&=2\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a}^2\\&=2\left(\boldsymbol{s}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\right)^2-\frac{9}{8}\boldsymbol{a}^2.\end{aligned}$$

当$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{s}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$ 时，上式取最小值$-\frac{9}{8}\boldsymbol{a}^2$.

> 为了运算方便，用 $\boldsymbol{s}^2$ 表示向量与自身的数量积 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}$．$2\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}-\frac{9}{8}\boldsymbol{a}^2$ 类似于 $\boldsymbol{s}$ 的二次函数，通过配方来求最小值．

因为等边△ABC 的边长为 2，所以 $|OA|=|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以
$$-\frac{9}{8}\boldsymbol{a}^2=-\frac{9}{8}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=-\frac{3}{2}.$$

因此，当点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取最小值，其最小值为$-\frac{3}{2}$.

例 2 如图 1.7－2，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E，F 分别是 AD，DC 的中点，BE，BF 分别交 AC 于 M，N．求证：M，N 三等分 AC.

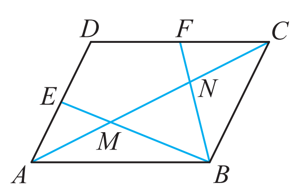


图 1.7－2

证明 由题意可得，$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{FC}$，

又$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NC}$，

所以$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FN}+2\overrightarrow{NC}$.

由于$\overrightarrow{AN}$与$\overrightarrow{NC}$，$\overrightarrow{NB}$与$\overrightarrow{FN}$分别共线，但$\overrightarrow{NC}$与$\overrightarrow{FN}$不共线，

所以
$$\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{FN}，\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}.$$
因此N是AC的一个三等分点.

同理可证
$$\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AM}.$$
因此M也是AC的一个三等分点.

例 3 图 1.7－3 为一个空间探测器的示意图，P_1，P_2，P_3，P_4是四台喷气发动机，P_1，P_3的连线与空间一个固定坐标系的x轴平行，每台发动机开动时，都能向探测器提供推力，但不会使探测器转动．开始时，探测器以恒定的速率v_0向正x方向平动，要使探测器改为正x偏负y 60°的方向以原来的速率v_0平动，则可(　　)

(A) 先开动P_1适当时间，再开动P_4适当时间

(B) 先开动P_3适当时间，再开动P_2适当时间

(C) 开动P_4适当时间

(D) 先开动P_3适当时间，再开动P_4适当时间

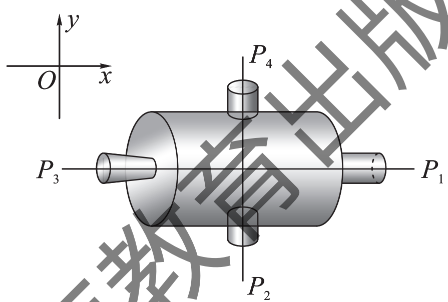


图 1.7－3

分析 探测器原以v_0的速率向正x方向平动，先考察需产生一个什么样的速度，才能使得它与原来的速度合成方向为正x偏负y 60°且大小为v_0的速度，然后再分析要产生这样的速度需要开动哪几台发动机.

解 如图 1.7－4，设探测器原以$\overrightarrow{PQ}$方向平动，速率为v_0，现要求探测器向$\overrightarrow{PR}$方向平动，其中$\angle QPR=60°$，$PR=v_0$．以PQ为一边，PR为对角线作$\square PQRS$，则$\overrightarrow{PS}$就是需要加给探测器的速度.

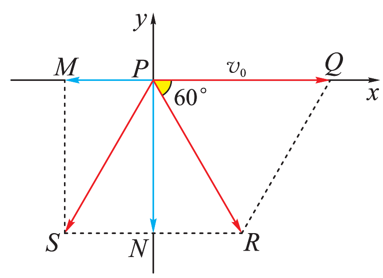


图 1.7－4

因为$\angle QPR=60°$，$PQ=PR$，所以$PQ=QR$，这说明$\square PQRS$为菱形，因而$PS=v_0$，$\angle RPS=60°$．由于四台发动机能提供的推力均沿x轴或y轴，于是将$\overrightarrow{PS}$沿x轴与y轴分解，得$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$.

因为$\overrightarrow{PM}$指向负x方向，故可开动发动机P_1一定时间，使它产生速度$\overrightarrow{PM}$.

又$\overrightarrow{PN}$指向负y方向，故可开动发动机P_4一定时间，使它产生速度$\overrightarrow{PN}$.

所以(A)是正确的选项.

例 4 如图 1.7－5，一个物体用两根绳子悬挂起来．已知物体所受的重力 $\boldsymbol{G}$ 大小为 20 N，两根绳子与铅垂线的夹角分别为 30°与 45°，求这两根绳子所受力的大小（精确到 0.1 N）．

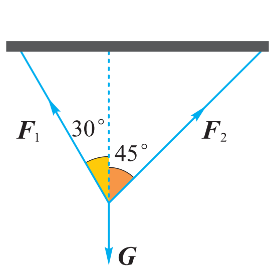


图 1.7－5

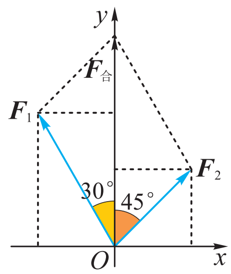


图 1.7－6

解 （方法一）如图 1.7－6，以 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的公共作用点 O 为原点，以水平方向为 x 轴，以铅垂线方向为 y 轴，建立平面直角坐标系．

由题意知 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}_{合}$ 的大小为 20 N，方向与重力方向相反，即为 y 轴正方向，因此 $\boldsymbol{F}_{合}$ 的坐标为(0，20)．

设 $|\boldsymbol{F}_1|=a$，$|\boldsymbol{F}_2|=b$，则

$$\boldsymbol{F}_1=(-a\sin 30°，a\cos 30°)=\left(-\frac{1}{2}a，\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)，$$

$$\boldsymbol{F}_2=(b\sin 45°，b\cos 45°)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b，\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)．$$

又 $\boldsymbol{F}_{合}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，

所以 $\begin{cases}-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0，\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=20，\end{cases}$

解方程组得 $a=20(\sqrt{3}-1)\approx 14.6(\text{N})$，

$b=10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\approx 10.4(\text{N})$．

（方法二）如图 1.7－7，在△OAC 中，$\angle AOC=45°$，$\angle ACO=30°$，

所以 $\angle CAO=105°$．

而 $|\boldsymbol{F}_{合}|=20$ N，

由正弦定理知

$$\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin 45°}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin 30°}=\frac{|\boldsymbol{F}_{合}|}{\sin 105°}，$$

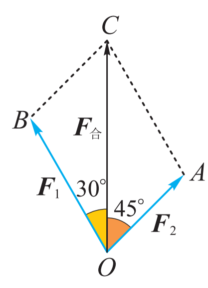


图 1.7－7

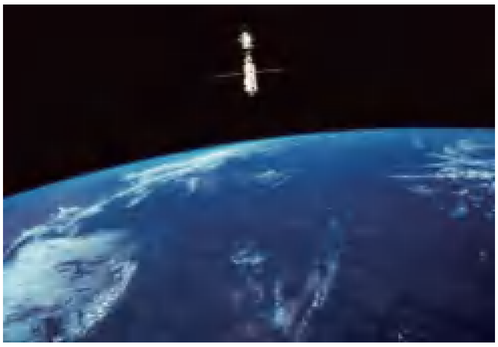
用计算器算得

$$|\boldsymbol{F}_1|\approx 14.6\ \text{N}，\ |\boldsymbol{F}_2|\approx 10.4\ \text{N}．$$

因此，这两根绳子所受力的大小分别约为 14.6 N 和 10.4 N．

例 5 已知地球半径 $R\approx6\ 400\ \mathrm{km}$，地面附近重力加速度 $g\approx9.8\ \mathrm{m/s^2}$．要发射人造卫星在地球表面附近绕地球做匀速圆周运动，卫星速度应达到多少？

解 设卫星质量为 m，绕地球做匀速圆周运动的速度大小为 v．由于使卫星做圆周运动的向心力 ma 是由地球引力 mg 提供的，因此 $ma=mg$，即 $a=g$.



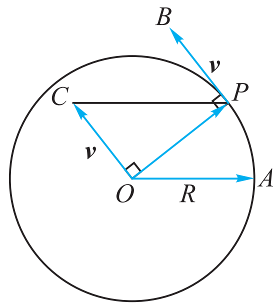


图 1.7－8

如图 1.7－8，由于卫星在地表附近绕地球旋转，因而其运动轨道半径可近似看作是地球的半径 R，于是卫星旋转一圈的路程是 $2\pi R$，卫星 P 运转一周的时间 $T=\dfrac{2\pi R}{v}$.

设地球地心为点 O，卫星运动的方向为以点 O 为圆心，R 为半径的圆的切线方向，大小为 $|\boldsymbol{v}|=|\overrightarrow{PB}|=v$．从地心 O 作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PB}$，则模 $|\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{v}|=v$，且 $\overrightarrow{OC}$ 的方向与 $\overrightarrow{PB}$ 相同，均垂直于半径，即 $\angle POC=90^\circ$.

虽然卫星速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小不变，但其方向不断改变，这导致表示速度 $\boldsymbol{v}$ 的有向线段 $\overrightarrow{OC}$ 的终点 C 始终在以 O 为圆心，v 为半径的圆上旋转，且 C 的旋转速度就是卫星速度 $\boldsymbol{v}$ 的变化速度，其大小等于卫星的加速度 g.

在卫星旋转过程中，OP，OC 的长度都不变，夹角 $\angle POC=90^\circ$ 也不变，因而 $\triangle POC$ 始终保持全等.

因此卫星 P 旋转一圈，$\triangle OPC$ 也跟着旋转了一圈，点 C 也旋转了一圈，时间仍为 $T=\dfrac{2\pi R}{v}$.

点 C 在轨道圆上旋转一圈的路程等于圆周长 $2\pi v$，因而其速度大小为

$$g=\frac{2\pi v}{T}=\frac{2\pi v}{\frac{2\pi R}{v}}=\frac{v^2}{R},$$

因此

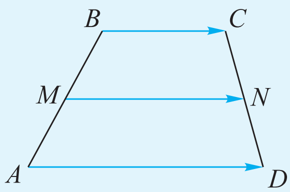
$$\begin{aligned}v&=\sqrt{gR}\\&\approx\sqrt{9.8\times6\ 400\ 000}\\&\approx7\ 900(\mathrm{m/s}).\end{aligned}$$

所以，卫星速度应达到 $7\ 900\ \mathrm{m/s}$，即 $7.9\ \mathrm{km/s}$.

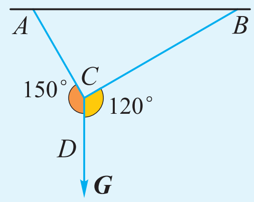
通常将这一速度称为第一宇宙速度.

练 习

1. 如图，已知 M，N 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，CD 的中点，求证：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



（第 1 题）



（第 2 题）

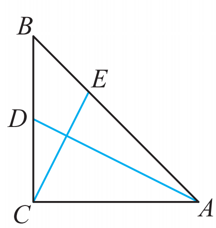
2. 如图，两根绳子把物体 W 吊在水平杆子 AB 上. 已知物体 W 的重力 $\boldsymbol{G}$ 大小为 10 N，$\angle ACD=150°$，$\angle BCD=120°$，求 A 和 B 处所受力的大小(绳子的重量忽略不计).

3. 帆船比赛是借助风力推动船只在规定距离内竞速的一项水上运动，如果一帆船所受的风力方向为北偏东 30°，速度为 20 km/h，此时水的流向是正东，流速为20 km/h. 若不考虑其他因素，求帆船的速度与方向.

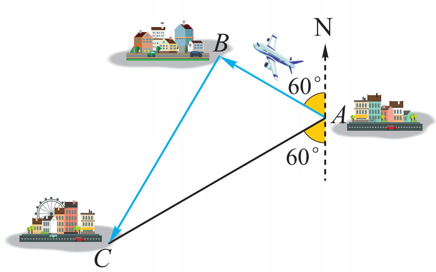
习题 1.7

学而时习之

1. 如图，在等腰 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D 是 BC 的中点，E 是线段 AB 上的点，且 $AE=2BE$，求证：$AD\perp CE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一架飞机从 A 地向北偏西 60°方向飞行 1 000 km 到达 B 地，然后向 C 地飞行，已知 C 地恰好在 A 地的南偏西 60°方向，并且 A，C 两地相距 2 000 km，求

飞机从 B 地到 C 地的位移.

3. 已知两个力(单位：N)$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 $60°$，其中$\boldsymbol{F}_1=(2，0)$，某质点在这两个力的共同作用下，由点 $A(1，1)$移动到点 $B(3，3)$(单位：m).

(1) 求 $\boldsymbol{F}_2$；

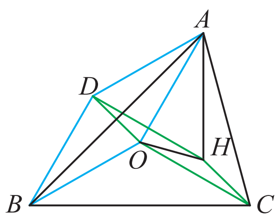
(2) 求 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力对质点所做的功.

温故而知新

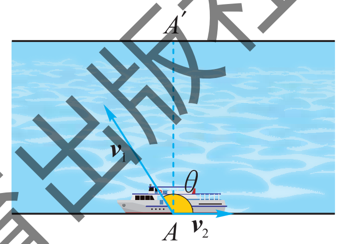
4. 如图，O 为$\triangle ABC$ 的外心，以 OA，OB 为邻边作平行四边形，它的第四个顶点为点 D，再以 OC，OD 为邻边作平行四边形，它的第四个顶点为点 H.

(1) 若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{OH}$；

(2) 求证：$AH\perp BC$.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，长江某地南北两岸平行，江面的宽度 $d=1$ km，一艘游船从南岸码头 A 出发航行到北岸. 假设游船在静水中的航行速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的大小为$|\boldsymbol{v}_1|=10$ km/h，水流速度 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小为$|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h，设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ，北岸 A'在 A 的正北方向.

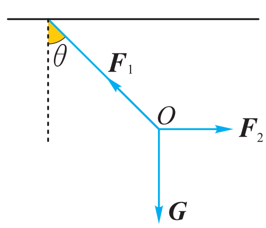
(1) 当 $\theta=120°$时，判断游船航行到北岸时的位置是在图中 A'的左侧还是右侧，并说明理由.

(2) 当 $\cos\theta$ 多大时，游船能到达 A'处？需航行多长时间？

6. 如图，在细绳 O 处用水平力 $\boldsymbol{F}_2$缓慢拉起所受重力为 $\boldsymbol{G}$ 的物体，绳子与铅垂方向的夹角为 θ，绳子所受到的拉力为 $\boldsymbol{F}_1$.

(1) 试说明$|\boldsymbol{F}_1|$，$|\boldsymbol{F}_2|$随角 θ 的变化而变化的情况；

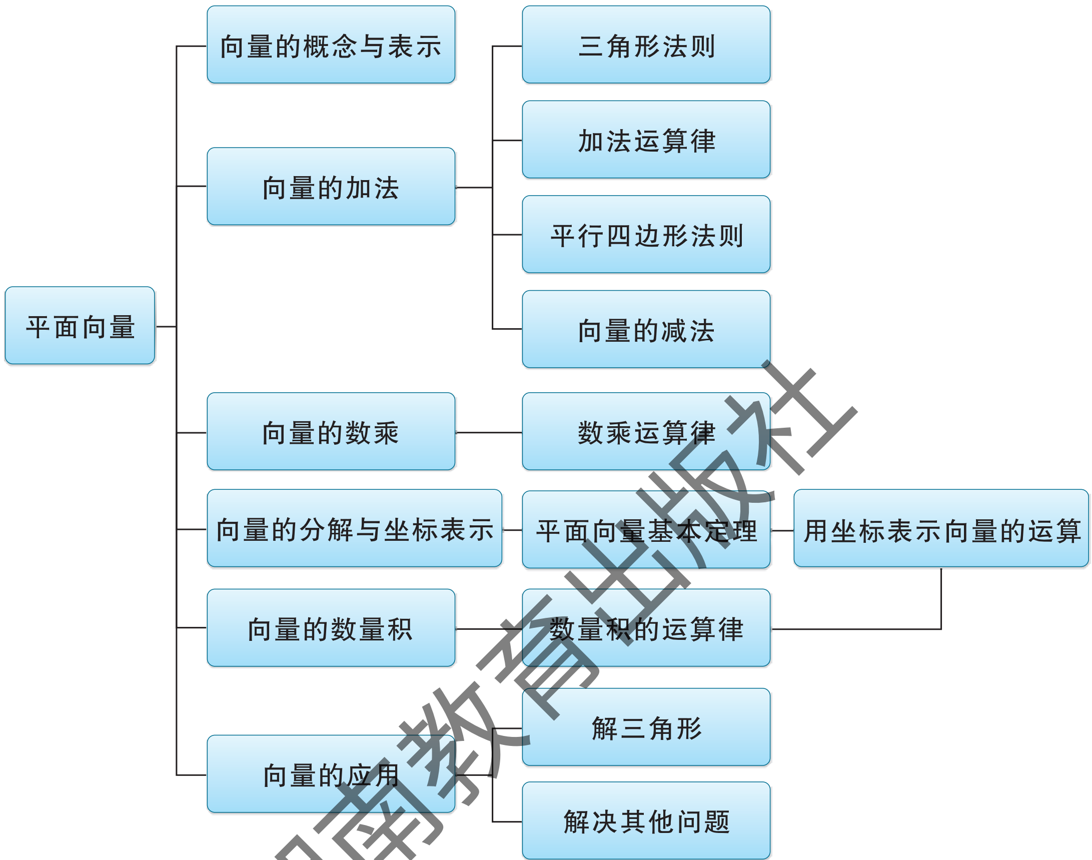
(2) 当$|\boldsymbol{F}_1|\leqslant 2|\boldsymbol{G}|$时，求角 θ 的取值范围.



(第 6 题)

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 向量是刻画现实世界的重要数学模型．力、速度、位移等物理概念都可以用向量来刻画．数学中研究的向量只有大小和方向，试比较数学与物理中向量概念的异同．

2. 向量作为代数的对象，可以像数一样进行运算，如本章介绍的向量的加、减、数乘等线性运算以及数量积运算等，而运算律在其中发挥了核心作用．试说明向量的线性运算和数量积运算具有哪些运算律，它们与实数运算律有哪些区别与联系．

3. 向量又是几何的对象，它刻画了几何图形的最基本要素——点的相对位置，而向量运算及运算律代表了一些最基本的几何性质，运用向量来解决几何问题将极大地丰富我们的研究视角与方法．

4. 平面向量基本定理揭示了任一平面向量均可用平面内的任意两个不共线向量来表示的实质. 它不仅提供了向量的几何表示方法，也使向量用坐标表示成为可能，从而架起了向量的几何运算与代数运算之间的桥梁. 试结合实例，体会这一基本定理的作用，并运用向量的坐标运算解决几何计算问题.

5. 向量是近代数学最重要的概念之一，是沟通几何、代数、三角等内容的桥梁，具有丰富的实际背景和广泛的应用. 你能借助向量这一工具推导余弦定理、正弦定理吗？试运用向量方法来解决一些数学或物理中的实际问题.

复习题一

学而时习之

1. 某人先向东走 3 km，位移记为 $\boldsymbol{a}$，接着再向北走 3 km，位移记为 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示(　　)

(A) 向东南走 $3\sqrt{2}$ km　　(B) 向东北走 $3\sqrt{2}$ km

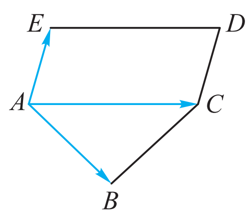
(C) 向东南走 $3\sqrt{3}$ km　　(D) 向东北走 $3\sqrt{3}$ km

2. 下列向量中不是单位向量的是(　　)

(A) $(-1,0)$　　(B) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$

(C) $(1,1)$　　(D) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}(|\boldsymbol{a}|\neq 0)$

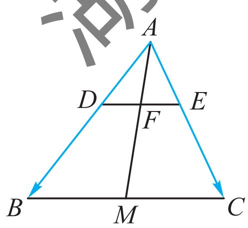
3. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ACDE$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}$及$\overrightarrow{CE}$.



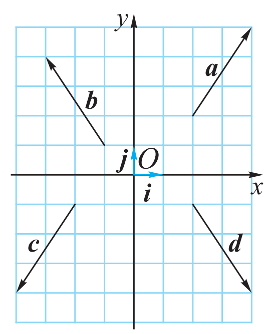
(第 3 题)

4. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不平行的向量，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. 若 A，B，D 三点共线，求 k 的值.

5. 如图，在△ABC 中，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，$DE\,/\!/\,BC$，与边 AC 交于点 E，△ABC 的中线 AM 与 DE 交于点 F. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{AF}$.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图，设$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$为一组标准正交基，用这组标准正交基分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d}$ 的坐标.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，在下列条件下分别求 k 的值：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$.

8. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，试求：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　（2）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

9. 已知点$A(-1，1)$，$B(1，2)$，$C(-2，-1)$，$D(3，4)$，求$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影.

10. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=(1，2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4，2)$，求该四边形的面积.

11. 在$\triangle ABC$中，

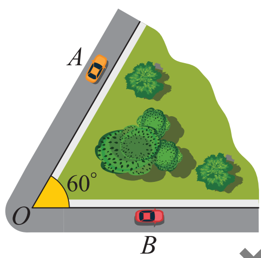
（1）已知$a=10$，$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，求c；

（2）已知$a=1$，$c=\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，求b；

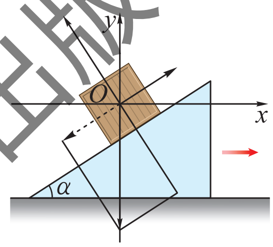
（3）已知$b=3\sqrt{3}$，$c=10$，$\angle A=30°$，求a；

（4）已知$a=\sqrt{19}$，$b=2$，$c=3$，求$\angle A$.

12. 如图，两条笔直的公路相交成60°角，两辆汽车A和B同时从交点O出发，分别沿两条公路行驶. 如果汽车A的速度是48 km/h，那么汽车B应以多大的速度行驶，才能使这两辆汽车在出发1 h后相距43 km(结果精确到1 km/h)?



（第12题）



（第13题）

13. 如图，质量为m的物体在表面粗糙的斜面上不动，斜面沿水平方向做匀速直线运动，若斜面的倾角为α，位移大小为s，求物体与斜面之间的摩擦力所做的功.

温故而知新

14. 已知点$A(1，2)$，$B(4，5)$，$O(0，0)$及$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.

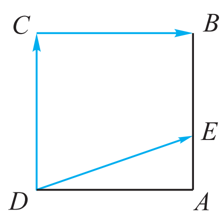
（1）当m为何值时，P在x轴上？P在y轴上？P在第四象限？

（2）四边形$OABP$能否成为平行四边形？若能，求出相应的m的值；若不能，说明为什么.

15. 如图，已知正方形$ABCD$的边长为1，点E是AB边上的动点，求：

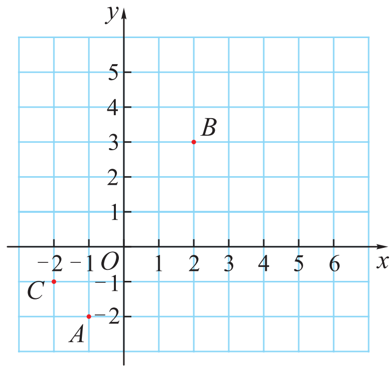
（1）$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$的值；

（2）$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值.



（第15题）

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，有点 $A(-1,\ -2)$，$B(2,\ 3)$，$C(-2,\ -1)$.



（第 16 题）

（1）求以线段 AB，AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长；

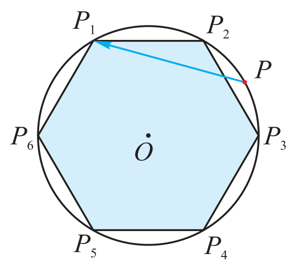
（2）设实数 t 满足 $(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$，求 t 的值.

17. 设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$，其中 $0<\beta-\alpha<\pi$.

（1）求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直；

（2）若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（其中 $k\in\mathbf{R}$）大小相等，求 $\beta-\alpha$.

18. 如图，六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，P 是 $\odot O$ 上的任一点，试判断 $|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_6}|^2$ 是否为定值，并说明理由. 你能否推广？



（第 18 题）

19. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，求 BC 边的长度.

20. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(3,\ 4)$，$B(0,\ 0)$，$C(c,\ 0)$.

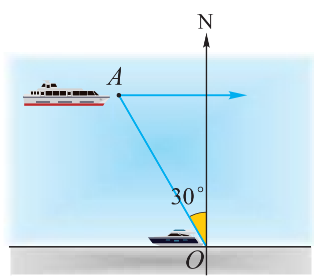
（1）若 $c=5$，求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，求 c 的值.

21. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，S 为 $\triangle ABC$ 的面积. 若向量 $\boldsymbol{p}=(2,\ a^2+b^2-c^2)$，$\boldsymbol{q}=(1,\ 2S)$ 满足 $\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$，求 $\angle C$ 的大小.

22. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,\ 1)$，$\dfrac{1}{|\overrightarrow{BA}|}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

23. 如图，某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时，轮船位于港口 O 北偏西 30°方向且与该港口相距20 n mile 的 A 处，并以 30 n mile/h 的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v n mile/h 的航行速度匀速行驶，经过 t h与轮船相遇.



（第 23 题）

（1）若希望相遇时小艇的航行距离最小，则小艇航行速度的大小应为多少？

(2) 假设小艇的最高航行速度只能达到 30 n mile/h，试设计航行方案(即确定航行方向与航行速度的大小)，使得小艇能以最短时间与轮船相遇，并说明理由.

上下而求索

24. (柯西不等式的几何意义) 求证：$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$ 对任意实数 a_1，a_2，b_1，b_2 成立，且等号成立的充分必要条件是 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

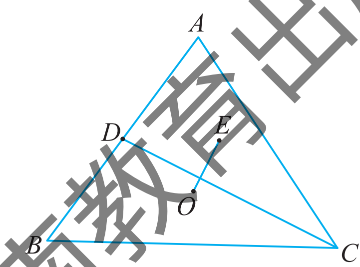
提示：(1) 以题目中的实数为坐标构造向量$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$，利用坐标计算出向量夹角 θ 的余弦 $\cos\theta$ 再代入不等式 $\cos^2\theta\leqslant1$.

(2) 为什么 $\cos^2\theta\leqslant1$？因为 $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta\geqslant0$. 柯西不等式左右两边之差

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta)^2$$
$$=(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta)^2=S^2.$$

你有哪些办法计算出 $S=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$？试解释它的几何意义.

25. 如图，设 O 是$\triangle ABC$ 的外心，D 是 AB 的中点，E 是$\triangle ACD$ 的重心，且 $AB=AC$. 求证：$OE\perp CD$.



(第 25 题)

第 2 章

2 三角恒等变换

三角恒等变换是研究三角函数性质及其应用的一种工具. 三角恒等变换是只变其形而不变其质，它可以揭示某些外形不同但实质相同的三角函数式之间的内在联系，使复杂变简单，化隐晦为明显，对于研究某些三角函数式及其在几何和物理等领域中的应用将发挥重要的作用.

2.1 两角和与差的三角函数

在平面直角坐标系内，若坐标系固定不动，将平面上任意一点 P 绕原点 O 旋转角 β，可以怎样描述这个旋转呢？

平面上的图形都是由点组成的，只要能够由每个点 P 的坐标(x, y)计算出它旋转到的新位置点 $P'(x', y')$的坐标，就明确描述了这个旋转，并且能够知道图形旋转后在平面上的位置.

如图 2.1－1，设 Ox 为 x 轴的非负半轴，$\angle xOP=\alpha$，$|OP|=r$，则点 P 的坐标$(x, y)=(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 将点 P 顺时针旋转角 β，其对应点为点 P'，则 $|OP'|=|OP|=r$，$\angle xOP'=\alpha-\beta$，从而点 P' 的坐标为$(r\cos(\alpha-\beta), r\sin(\alpha-\beta))$.

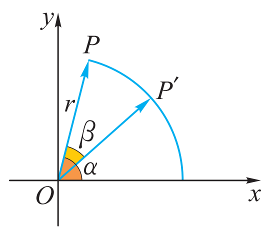


图 2.1－1

于是，根据点 P 的坐标与旋转角 β 求点 P' 的坐标的问题就可归结为：

怎样由角 α，β 的三角函数值求角 $\alpha-\beta$ 的三角函数值 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$？

2.1.1 两角和与差的余弦公式

我们首先来探究角 $\alpha-\beta$ 的余弦值，即 $\cos(\alpha-\beta)$等于多少.

当 $\alpha-\beta\in[0, \pi]$时，如图 2.1－2，设 $\alpha=\angle xOP$，$\beta=\angle xOP'$，在这两个角的终边上分别取两个单位向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB=\alpha-\beta$就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

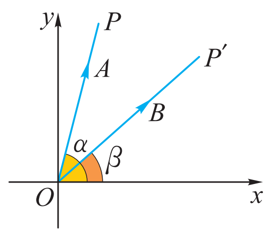


图 2.1－2

根据前面所学的向量知识可知，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\\&=\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.\end{aligned}$$

由平面向量基本定理知，$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta, \sin\beta)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(\cos\alpha, \sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

所以 $$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad ①$$

又当 $\alpha-\beta\in[0, \pi]$时，$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\cos(\alpha-\beta)$，

因此 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

对任意的角 α，β，总可选取适当的整数 k，使得 $\alpha-\beta-2k\pi\in[-\pi,\ \pi)$．记 $\beta_1=\beta+2k\pi$，则 β_1 与 β 的终边相同，且 $\alpha-\beta_1\in[-\pi,\ \pi)$，如图 2.1－3，从而 $0\leqslant|\alpha-\beta_1|\leqslant\pi$，则 $|\alpha-\beta_1|$ 就是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$．

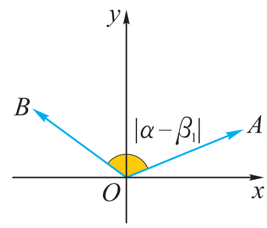


图 2.1－3

因此
$$\begin{aligned}\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle&=\cos|\alpha-\beta_1|\\&=\cos(\alpha-\beta_1)\\&=\cos(\alpha-\beta-2k\pi)\\&=\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}\qquad ②$$

将②代入①，得到

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

我们将上式称为**两角差的余弦公式**(简记为 $C_{(\alpha-\beta)}$)．

注意到 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 之间的联系：
$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta).$$

由 $C_{(\alpha-\beta)}$ 可得
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

由此，我们得到**两角和的余弦公式**(简记为 $C_{(\alpha+\beta)}$)：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

在图 2.1－1 中，若将点 P 逆时针旋转角 β，则会产生角 $\alpha+\beta$．你能由此求出 $\cos(\alpha+\beta)$ 吗？试一试．

例 1 求 75°，15°角的余弦值．

解
$$\begin{aligned}\cos 75^\circ&=\cos(45^\circ+30^\circ)\\&=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\&=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例 2 求下列各式的值：

（1）$\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$；

（2）$\sin 5^\circ \cos 40^\circ + \sin 85^\circ \sin 40^\circ$.

分析 将两角和（差）的余弦公式从右至左地运用.

解 （1）原式$=\cos(20^\circ+40^\circ)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

（2）原式$=\cos 85^\circ \cos 40^\circ + \sin 85^\circ \sin 40^\circ$

$$=\cos(85^\circ-40^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

> $\cos \alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

例 3 已知 $\sin \alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos \beta=\dfrac{5}{13}$，且角 α，β 分别位于第二、四象限，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

分析 利用两角和（差）的余弦公式求 $\alpha \pm \beta$ 的余弦值时，需要先知道 α，β 的正余弦值.

解 因为角 α，β 分别位于第二、四象限，

所以 $\cos \alpha<0$，$\sin \beta<0$，

故 $$\cos \alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},$$

$$\sin \beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

所以 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta$$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{33}{65},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta$$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{63}{65}.$$

练习

1. 利用两角差的余弦公式，证明下列诱导公式：

（1）$\sin \alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$； （2）$\cos \alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

2. 求下列各式的值：

（1）$\cos 20^\circ \cos 25^\circ-\sin 20^\circ \sin 25^\circ$； （2）$\cos 80^\circ \cos 20^\circ+\sin 80^\circ \sin 20^\circ$；

（3）$\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ$.

3. 已知 α 为锐角，且 $\sin \alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

2.1.2 两角和与差的正弦公式

在上一小节的练习中，我们用两角差的余弦公式证明了 $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$这一诱导公式，若将 α 替换为 $\alpha-\beta$，可得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

由此，我们得到**两角差的正弦公式**(简记为 $S_{(\alpha-\beta)}$)：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

在两角差的正弦公式中，若将 β 替换为 $-\beta$，则可得**两角和的正弦公式**(简记为 $S_{(\alpha+\beta)}$)：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

例 4 求 75°，15°角的正弦值.

解
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ$；

(2) $\sin 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 5^\circ\sin 40^\circ$.

解 (1) 原式 $=\sin(20^\circ+40^\circ)$

$$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 原式$=\sin 85^\circ\cos 40^\circ-\cos 85^\circ\sin 40^\circ$

$=\sin(85^\circ-40^\circ)$

$=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 6 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，α 为第二象限角，$\sin\beta=-\dfrac{12}{13}$，$\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

解 因为 α 为第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$.

又 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}.$$

因为 $\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，所以 $\cos\beta>0$.

又 $\sin\beta=-\dfrac{12}{13}$，所以

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{5}{13}.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)\\&=\frac{63}{65},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)\\&=-\frac{33}{65}.\end{aligned}$$

练习

1. 利用两角和(差)的正弦公式计算：

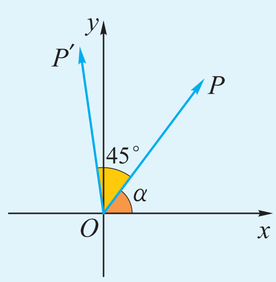
(1) $\sin 105^\circ$； (2) $\sin 165^\circ$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sin 50^\circ\cos 10^\circ+\cos 50^\circ\sin 10^\circ$；

(2) $\cos 80^\circ\sin 20^\circ-\sin 80^\circ\cos 20^\circ$.

3. 如图，已知向量 $\overrightarrow{OP}=(3,\ 4)$，绕原点逆时针旋转 45° 到 $\overrightarrow{OP'}$ 的位置，求点 P' 的坐标.



(第 3 题)

2.1.3 两角和与差的正切公式

我们已经由角 α，β 的三角函数值求出了角 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正弦值和余弦值.

若 $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$，则将角 $\alpha+\beta$ 的正弦值、余弦值分别代入 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，就可求出角 $\alpha+\beta$ 的正切值.

下面我们一起来试试看：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

如果 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$，那么 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 都存在，则将上面最后一步所得式子的分子、分母同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$，可得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

将上式中的 β 替换成 $-\beta$，则又有

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan[\alpha+(-\beta)]\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

你能借助 $S_{(\alpha-\beta)}$ 与 $C_{(\alpha-\beta)}$ 推导出两角差的正切公式吗？自己动手试一试.

当 α，β，$\alpha\pm\beta$ 均不取 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，我们得到如下**两角和与差的正切公式**（分别简记为 $T_{(\alpha+\beta)}$，$T_{(\alpha-\beta)}$）：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

例 7 已知 $\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$，分别求下列各式的值.

（1）$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　（2）$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解　（1）$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}.$

因为 $\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$，

所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{12}{5}+1}{1-\dfrac{12}{5}}=-\dfrac{17}{7}$.

(2) $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$.

因为 $\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$,

所以 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{12}{5}-1}{1+\dfrac{12}{5}}=\dfrac{7}{17}$.

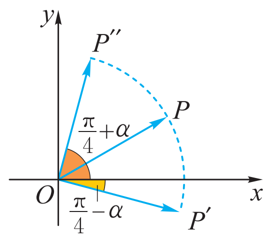


图 2.1 - 4

根据例 7 并结合图 2.1 - 4 思考：对于任意角 α，只要 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 有意义，是否一定有 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$?

例 8 利用两角和(差)的正切公式，求 $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ 的值.

分析 由于 $15^\circ=45^\circ-30^\circ$，因此可以利用差角正切公式先求出 $\tan 15^\circ$ 的值，然后再代入原式求解；本题也可由 $1=\tan 45^\circ$，转化待求式的形式，进而直接运用两角和的正切公式求解.

解 (方法一) 因为
$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1-\tan 30^\circ}{1+\tan 30^\circ}=2-\sqrt{3},$$

所以 $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\dfrac{1+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\sqrt{3}$.

(方法二) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

例 9 美国纽约时报广场有一块以中国元素为主要内容的显示屏，已知屏幕顶端与底端离地面的距离分别约为 87 m 与 67 m，求行人在地面上离屏幕水平距离 100 m 处观看屏幕时视角[①]的正切值(结果精确到 0.001，计算过程中忽略人的高度).

① 人眼观察物体时，从物体两端(上、下或左、右)引出的光线在人眼光心处所成的夹角，称为视角.

解 根据题意可抽象出图 2.1－5，当忽略行人的高度时，设行人在地面离屏幕水平距离 100 m 处(A 点)观看屏幕的顶端(C 点)和底端(B 点)的仰角分别为 α，β，则此时行人观看屏幕的视角为 $\alpha-\beta$.

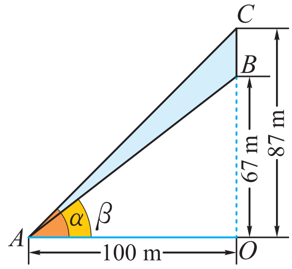


图 2.1－5

因为 $\tan\alpha=\dfrac{87}{100}=0.87$，$\tan\beta=\dfrac{67}{100}=0.67$，

$$\text{所以 } \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{0.2}{1+0.67\times0.87}\approx0.126.$$

故行人在该处观看屏幕时，视角的正切值约为 0.126.

我们将求两角和 $\alpha+\beta$ 的正弦、余弦、正切的公式都称为**和角公式**，将求两角差 $\alpha-\beta$ 的正弦、余弦、正切的公式都称为**差角公式**.

回顾前面六个公式的推导过程，我们可以发现它们之间存在着紧密的联系，这种联系可用框图(图 2.1－6)来表示：

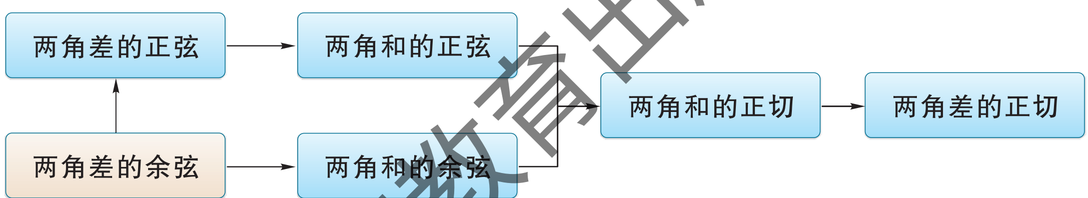


图 2.1－6

练 习

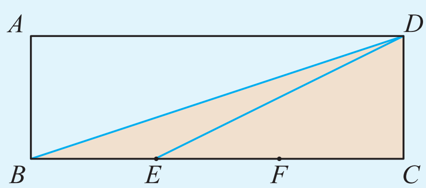
1. 已知 $\tan\alpha=4$，求下列各式的值：

(1) $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$； (2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

2. 求 $\dfrac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$ 的值.

3. 已知 α，β 满足 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值.

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的相邻两条边 AB，BC 的长度分别为 1 和 3，点 E，F 是 BC 的三等分点，求证：$\angle DBC+\angle DEC=45^\circ$.



(第 4 题)

习题 2.1

学而时习之

1. 利用两角和(差)的余弦公式证明诱导公式：

(1) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$；

(2) $\cos(2k+1)\pi=\cos\pi(k\in\mathbf{Z})$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\cos 12^\circ\cos 48^\circ-\sin 12^\circ\sin 48^\circ$；

(2) $\cos 30^\circ\cos 75^\circ+\sin 30^\circ\sin 75^\circ$.

3. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，且 α，β 均为第四象限角，求下列各式的值：

(1) $\cos(\alpha+\beta)$； (2) $\cos(\alpha-\beta)$.

4. 求下列各式的值：

(1) $\sin 35^\circ\cos 10^\circ+\cos 35^\circ\sin 10^\circ$；

(2) $\sin 75^\circ\cos 30^\circ-\cos 75^\circ\sin 30^\circ$；

(3) $\sin 168^\circ\cos 18^\circ+\cos 12^\circ\cos 72^\circ$.

5. 求证：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(2) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

7. 计算：

(1) $\dfrac{\tan 37^\circ+\tan 23^\circ}{1-\tan 37^\circ\tan 23^\circ}$；

(2) $\dfrac{\tan 53^\circ-\tan 23^\circ}{1+\tan 53^\circ\tan 23^\circ}$.

8. 已知 $\tan\alpha=3$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

9. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

10. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根，求$\tan(\alpha+\beta)$的值.

温故而知新

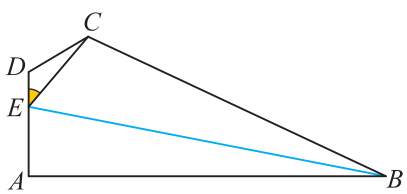
11. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{12}{13}$，其中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$，求 $\sin\alpha$ 的值.

12. 已知 α 是第四象限角，且 $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，求 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$的值.

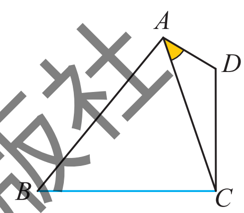
13. 求 $\tan 112°30'+\tan 22°30'$的值.

14. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$DA\perp AB$，$DE=1$，$EC=\sqrt{7}$，$EA=2$，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$\angle BEC=\frac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\sin\angle CED$ 的值；　　(2) 求 BE 的长.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$CD=2$，$AC=\sqrt{7}$.

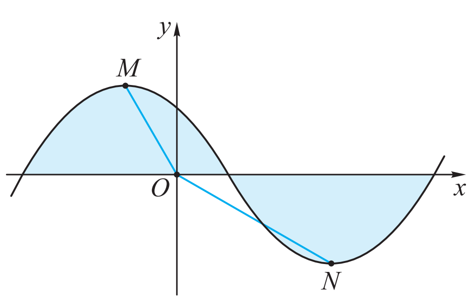
(1) 求 $\cos\angle CAD$ 的值；

(2) 若 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，$\sin\angle CBA=\frac{\sqrt{21}}{6}$，求 BC 的长.

16. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是一元二次方程 $x^2+3x+c=0$ 的两个根，若 $\cos(\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$，求 c 的值.

17. 若函数 $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$ $(-\pi<\varphi<\pi)$的一部分图象如图所示，$M(-1,\ \sqrt{3})$，$N(3,\ -\sqrt{3})$为图象上的两个顶点. 设$\angle MON=\theta$，其中 O 为坐标原点，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(1) 求 φ 的值；　　(2) 求 $\cos(\theta-\varphi)$的值.



（第 17 题）

2.2 二倍角的三角函数

在正弦、余弦、正切的和角公式中，若 $\alpha=\beta$，你能得到怎样的结论？

在和角公式中，令 $\beta=\alpha$，则可以得到：

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

即

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

上述三个等式统称为**二倍角公式**，依次简记为 $S_{(2\alpha)}$，$C_{(2\alpha)}$，$T_{(2\alpha)}$.

由于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以二倍角公式中的 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 还可以进一步表示为

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以 $\cos\alpha<0$.

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

所以

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\left(-\frac{24}{25}\right)\times\left(-\frac{25}{7}\right)=\frac{24}{7}.$$

例 2 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$，求：

（1）$\tan 2\alpha$；　　（2）$\tan 4\alpha$；

（3）$\tan\beta$，其中 β 满足 $4\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

解　（1）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{5}{12}$.

（2）$\tan 4\alpha=\tan 2(2\alpha)=\dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\dfrac{120}{119}$.

（3）因为 $\beta=\frac{\pi}{4}-4\alpha$，

所以 $\tan\beta=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-4\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan 4\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan 4\alpha}=\dfrac{1-\frac{120}{119}}{1+\frac{120}{119}}=-\dfrac{1}{239}$.

例 3 已知 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求证：$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}=-\cos\alpha$.

证明　将 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 代入，得

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1)}=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|.$$

又因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\cos\alpha<0$，

所以 $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$.

> ？你还能用其他方法证明吗？哪种方法更简单？

练习

1. 利用二倍角公式求下列各式的值：

（1）$\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；　　（2）$2\cos^2 75^\circ-1$；

（3）$1-\sin^2 15^\circ$；　　（4）$\dfrac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$.

2. （1）已知 $\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，$\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，求 $\tan(\alpha-2\beta)$ 的值.

3. 求证：（1）$\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{2}{\tan 2\theta}=\tan\theta$；

（2）$\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$.

例 4 已知 α 为第二象限的角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，β 为第一象限的角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

解 因为 α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{24}{7}$.

又因为 β 为第一象限角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，

所以 $\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\tan\beta=\frac{12}{5}$.

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{24}{7}-\frac{12}{5}}{1-\frac{24}{7}\times\frac{12}{5}}=\frac{204}{253}$.

例 5 化简：$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$.

解 由二倍角公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，得 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned}于是，原式&=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2\alpha\right]\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 6 求证：半径为 R 的圆的内接矩形的最大面积为 $2R^2$.

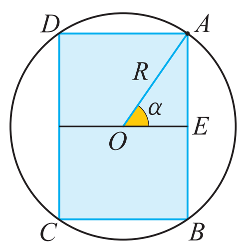


图 2.2-1

证明 如图 2.2-1，设圆心为 O，矩形 $ABCD$ 的面积为 S. 作 $OE\perp AB$ 于点 E. 设 $\angle AOE=\alpha$，则

$$AB=2R\sin\alpha,\quad AD=2R\cos\alpha.$$

$$\begin{aligned}所以\qquad S&=2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\alpha\\&=4R^2\sin\alpha\cos\alpha\\&=2R^2\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

当 $\sin 2\alpha$ 取最大值，即 $\sin 2\alpha=1$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，矩形的面积 S 最大，且为 $2R^2$.

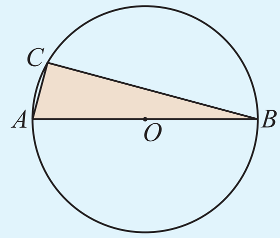
练习

1. 已知 α 是第一象限角，且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值.

2. 求证：（1）$3+\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha=8\sin^4\alpha$；

（2）$\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha+\dfrac{1}{2}$.

3. 如图，C 是以 AB 为直径的圆上一点，$\dfrac{S_{\odot O}}{S_{\triangle ABC}}=2\pi$，求证：$\triangle ABC$ 的较小锐角为 $15°$.



（第 3 题）

习题 2.2

学而时习之

1. 求下列各式的值：

（1）$\sin 112°30'\cos 112°30'$；

（2）$2\sin^2\dfrac{\pi}{12}-1$；

（3）$\sin^2 75°-\cos^2 75°$；

（4）$\dfrac{3}{4}-2\cos^2 22°30'$.

2. 化简：

（1）$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

（2）$\dfrac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$；

（3）$\cos 40°(1+\sqrt{3}\tan 10°)$；

（4）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$；

（5）$\dfrac{1}{1+\tan\alpha}-\dfrac{1}{1-\tan\alpha}$；

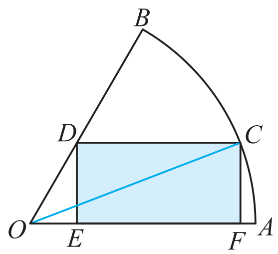
（6）$\dfrac{3-\sin 70°}{2-\cos^2 10°}$.

3. 若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值.

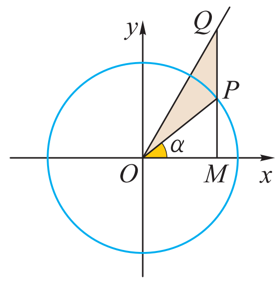
4. 若 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$，$\alpha$ 是第四象限角，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

5. 求函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2 x$ 在区间 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

6. 如图，圆心角为 60°的扇形 AOB 的半径为 1，C 是弧 AB 上一点，作矩形 $CDEF$，且点 D 在半径 OB 上，点 E，F 在半径 OA 上. 当点 C 在什么位置时，这个矩形的面积最大？此时$\angle AOC$ 等于多少度？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 是单位圆上的动点，过点 P 作 x 轴的垂线，与射线 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$ 交于点 Q，与 x 轴交于点 M. 记$\angle MOP=\alpha$，且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

（1）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\cos\angle POQ$；

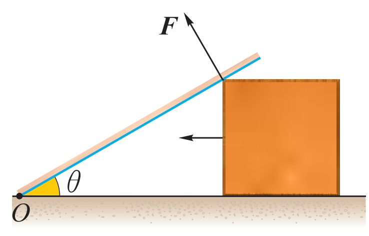
（2）求$\triangle OPQ$ 面积的最大值.

温故而知新

8. 已知等腰三角形顶角的余弦值为 $\frac{5}{13}$，求这个三角形底角的正弦、余弦以及正切值.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos^2x-\frac{1}{2}\sin^2x+1-\sqrt{3}\sin x\cos x$，求 $f(x)$的周期及单调递增区间.

10. 如图，一质量为 m 的均匀细木棒的一端斜放在一方形木块上，另一端固定在地面上，木棒与水平地面的夹角 $\theta=30^\circ$. 当木块以恒定的速度向左方移动时，细木棒受到的支持力 $\boldsymbol{F}$ 如何变化？何时支持力最大？



（第 10 题）

2.3 简单的三角恒等变换

将一个三角函数式变为与之恒等的其他三角函数式的变换过程，称为**三角恒等变换**. 进行三角恒等变换时，一般要使用三角函数间的关系式，如三角函数的诱导公式、和角公式、差角公式、倍角公式，有时还需要运用一些其他的公式. 下面我们来学习一些新的公式.

一 半角公式

你能由 $\cos\alpha$ 计算出 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值吗?

由于 $\alpha=2\times\frac{\alpha}{2}$，可思考运用倍角公式来求 $\frac{\alpha}{2}$ 的正弦、余弦、正切值.

记 $\beta=\frac{\alpha}{2}$，则 $\alpha=2\beta$.

由 $\cos\alpha=\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta$，推出 $\sin^2\beta=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，即

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

由 $\cos\alpha=\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$，推出 $\cos^2\beta=\frac{1+\cos\alpha}{2}$，即

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

由 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，得 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

将上面所得的三个等式的左右两端分别开平方，可得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad ①$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad ②$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \quad ③$$

半角公式和倍角公式实质是对同一公式的不同变形.

上面推导出的公式①②③统称为**半角公式**，分别简记为 $S_{\frac{\alpha}{2}}$，$C_{\frac{\alpha}{2}}$，$T_{\frac{\alpha}{2}}$．半角公式的符号需要根据角$\frac{\alpha}{2}$所在的象限来判断．

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求下列条件下 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$的值：

（1）$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$；　　　　（2）角 α 在第一象限．

解 （1）当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$．

又 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{1}{3}.$$

（2）当角 α 在第一象限时，$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$．

当 k 为偶数时，角$\frac{\alpha}{2}$在第一象限，故由(1)可得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$

当 k 为奇数时，角$\frac{\alpha}{2}$在第三象限，此时有

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$

例 2 求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$．

证明 因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，

所以 $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$．

又 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$，

故 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}.$$

因此 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

例 3 当 $\alpha\neq2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$时，求证：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}，\quad\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}，\quad\tan\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

证明 当 $\alpha\neq2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$时，利用二倍角公式及 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$，可得

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}, \tag{④}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{⑤}$$

将④⑤两式相除，可得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{⑥}$$

由例 3 可以看到，角 $\alpha(\alpha\neq2k\pi+\pi，k\in\mathbf{Z})$的所有三角函数值都可以用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$来表示，这组公式(④～⑥)简称为 **“万能公式”**.

练习

1. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$，且$\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$和 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$的值.
2. 利用半角公式，求 $\sin\dfrac{5\pi}{12}-\cos\dfrac{5\pi}{12}$的值.
3. 已知 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，求 $\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$ 和 $\tan2\alpha$ 的值.

二 和差化积与积化和差公式

在求解三角函数的有关问题时，有时需要把三角函数的积化为和或差的形式，有时又需要把和或差化为积的形式，这应如何转化?

借鉴前面通过计算两个单位向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$的数量积得出差角余弦公式的思路，我们继续尝试用向量的方法来探讨如何将三角函数的和或差转化为积的形式.

如图 2.3－1，从坐标原点 O 出发作 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$，则

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta).$$

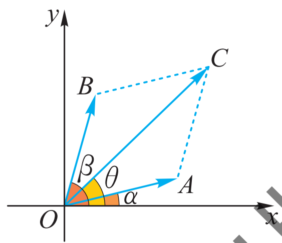


图 2.3－1

在图 2.3－1 中，$\overrightarrow{OC}=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，其中 $r=|\overrightarrow{OC}|$，$\angle xOC=\theta$. 又因为四边形 $OACB$ 是菱形，所以 OC 是$\angle AOB$ 的平分线，因而

$$\theta=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

故 $\overrightarrow{OC}=\left(r\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

又

$$\begin{aligned} r&=|\overrightarrow{OC}|\\ &=2|\overrightarrow{OB}|\cos\angle COB\\ &=2\cos\frac{\angle AOB}{2}\\ &=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\\ &=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \end{aligned}$$

想一想，此处的几何推理在哪些情况下成立?其他情况能不能化成这些情况?

所以

$$\overrightarrow{OC}=\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

于是，根据平面向量基本定理可得

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad ①$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad ②$$

前面是通过几何图形得到上面两个公式的，其优点是形象直观，但所发现的公式是否对任意两个角 α，β 都成立，还需要对各种情形进行讨论．为了避免这种讨论，我们用和角与差角公式来证明．

将等式①右边出现的角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 分别用字母 A，B 表示，设

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad B=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

则
$$A+B=\alpha,\qquad A-B=\beta.$$

于是

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta&=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B+\cos A\cos B+\sin A\sin B\\&=2\cos A\cos B\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha-\cos\beta&=\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B-(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\\&=-2\sin A\sin B\\&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

> 代数运算(包括三角恒等变换)与几何推理各有所长，各有所短．关键是扬长避短，恰当选择．

类似地可以证明

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

将上述和差化为积的公式称为**和差化积公式**．

例 4 求证：(1) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

(2) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$．

证明 (1) 将公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

左右两边分别相加，得

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

将上式两边同除以 2，得

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

（2）将公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

左右两边分别相减，得

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

将上式两边同除以−2，得

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

将 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\sin(\alpha-\beta)$ 两组公式分别相加减，你还能得出哪些积化和差公式？

例 4 的结论实质上是**积化和差公式**.

例 5 在△ABC 中，求证：

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$$

证明 原式左边$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2[\pi-(A+B)]-1$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1$

$=2\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]-1$

$=4\cos(A+B)\cos A\cos B-1$

$=4\cos(\pi-C)\cos A\cos B-1$

$=-4\cos A\cos B\cos C-1$

$=$右边.

你还能用其他方法来证明这个结论吗？

练习

1. 用和角与差角公式证明：

（1）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$；

（2）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 求证：（1）$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

（2）$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.

3. 化简：

（1）$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)$；

（2）$\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\cos 20^\circ$.

前面学习的和差化积公式，均是 $\cos\alpha\pm\cos\beta$ 以及 $\sin\alpha\pm\sin\beta$ 的形式，现在我们来学习如何对 $\sin x+\cos x$ 这种形式进行三角恒等变换.

为了找到变换思路，我们先借助计算机画出函数 $y=\sin x+\cos x$ 的部分图象，如图 2.3 - 2.

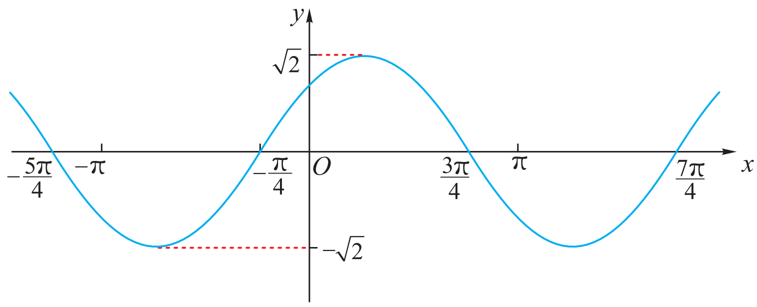


图 2.3 - 2

> 你能想到图 2.3 - 2 是函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象吗？

通过观察，可以发现图 2.3 - 2 与正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象很相似. 于是，我们可以猜测：是否存在某个正数 A 和角 φ，使得 $y=\sin x+\cos x$ 可化为 $y=A\sin(x+\varphi)$ 的形式，即能否找到某个正数 A 和角 φ，使 $\sin x+\cos x=A\sin(x+\varphi)$ 成立？

由和角公式可得

$$\begin{aligned}A\sin(x+\varphi)&=A(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)\\&=A\cos\varphi\cdot\sin x+A\sin\varphi\cdot\cos x.\end{aligned}$$

要使上式等于 $\sin x+\cos x$，只需 $A\cos\varphi=1$ 和 $A\sin\varphi=1$ 同时成立，即

$$\cos\varphi=\frac{1}{A}\ \text{且}\ \sin\varphi=\frac{1}{A}.$$

又 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$，

所以 $\left(\frac{1}{A}\right)^2+\left(\frac{1}{A}\right)^2=1$，解得 $A=\sqrt{2}$.

故 $\cos\varphi=\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而取 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 即可达到要求.

可见，$y=\sin x+\cos x$ 可化为 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的形式.

即
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

推广到一般情况，要使 $a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi)$（$ab\neq0$，且 $A>0$）成立，则只需选取 A，φ，使

$$\begin{cases}A\cos\varphi=a,\\A\sin\varphi=b,\end{cases}\ \text{即}\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{A},\\[2ex]\sin\varphi=\dfrac{b}{A}.\end{cases}$$

由 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ 可得 $\left(\dfrac{a}{A}\right)^2+\left(\dfrac{b}{A}\right)^2=1$，即 $A=\sqrt{a^2+b^2}$.

因此，当 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$时，

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

成立，其中 $0\leqslant\varphi<2\pi$.

上述结论在数学和物理学中有着广泛的应用，下面我们分别举例来说明.

例 6 已知函数 $f(x)=2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}$，求函数 $f(x)$的周期、最大值和最小值.

解 因为 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}$

$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

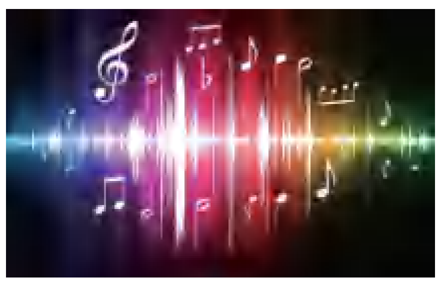
$$=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right),$$

所以 $f(x)$的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

当 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ 时，$f(x)$取得最大值 2；

当 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ 时，$f(x)$取得最小值 -2.

例 7 用几种不同的乐器同时弹奏某一首乐曲时，我们有时能听到比用单一乐器弹奏时更美妙的声音，这实际上是几种声波合成后改变了单一声波的波形. 假设某美妙声波的传播曲线可用函数$y=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin 2x$ 来描述，求该声波函数的周期、最大值和最小值.



解 由已知得 $y=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin 2x$

$$=\cos 2x-\sin 2x+2\sin 2x$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

因此，该函数的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，最大值和最小值分别为$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$.

练习

1. 化简：

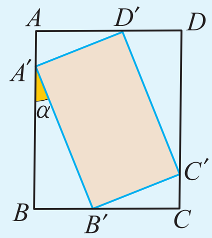
(1) $3\sin x+4\cos x$；　　(2) $-\sin x-\cos x$.

2. 求下列函数的最大值：

(1) $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$；

(2) $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. 如图，矩形 $A'B'C'D'$ 的四个顶点分别在矩形 $ABCD$ 的四条边上，且矩形 $ABCD$ 的周长为 l. 如果 AB 与 $A'B'$ 的夹角为 α，那么当 α 为何值时，矩形 $A'B'C'D'$ 的周长最大？



（第 3 题）

习题 2.3

学而时习之

1. 利用半角公式，求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}$；

(2) $\tan\dfrac{\pi}{8}+\tan\dfrac{3\pi}{8}$.

2. 已知 $\tan\alpha=-3$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

3. 利用积化和差公式，求下列各式的值：

(1) $\cos 15^\circ\cos 75^\circ$；

(2) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$.

4. 利用和差化积公式，求下列各式的值：

(1) $\sin 15^\circ+\sin 105^\circ$；

(2) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 80^\circ$；

(3) $\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ$.

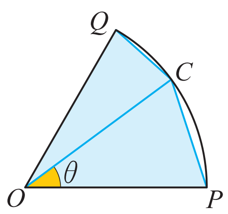
5. 当 $x=\alpha$ 时，函数 $f(x)=2\sin x+\cos x$ 取最小值，求 $\sin\alpha$ 的值.

6. 已知 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，求 $\cos\alpha$ 的值.

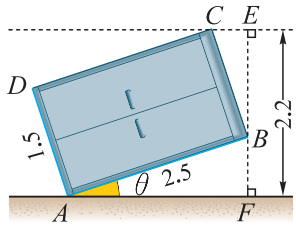
7. 如图，已知扇形 OPQ 的半径为 2，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，C 是扇形弧上的一动点，记$\angle COP=\theta$，四边形 $OPCQ$ 的面积为 S.

（1）找出 S 与 θ 的函数关系；

（2）试探求当 θ 取何值时，S 最大，并求出这个最大值.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，两名搬家工人要将一个大衣柜搬出房间，已知衣柜长 1.5 m，宽 0.8 m，高 2.5 m，房门的宽为1.2 m，高为 2.2 m．试问此衣柜的倾斜度要在多少度以下，才能顺利通过房门（$\tan 30.96°\approx 0.6$，$\sin 48.59°\approx 0.75$，$\sqrt{8.5}\approx 2.92$）?

温故而知新

9. 已知$\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-3\cos\theta}=-5$，求 $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta$ 的值.

10. 设 α 为第二象限角，若 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

11. 求函数 $y=\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的最大值.

12. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x-\frac{1}{2}$.

（1）求函数 $f(x)$的周期；

（2）求函数 $f(x)$在区间$\left[0，\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值与最小值.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sin x，\frac{3}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x，-1)$.

（1）当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，求 $2\cos^2 x-\sin 2x$ 的值；

（2）求 $f(x)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}，0\right]$上的最大值.

多知道一点

电子琴为什么能模拟不同乐器的声音

你弹过电子琴吗？你想过没有：电子琴为什么能模拟各种不同的乐器(比如钢琴、小提琴、大提琴、长笛等)发出的声音？

要想模拟这些不同乐器的声音，首先要知道不同乐器发出的声音为什么不同.

由物理学知识可知：

声音是由振动产生的.

乐音有三要素：响度，音调，音色.

响度反映声音的强弱．它由振动的振幅决定．振幅越大，声音就越强，响度就越大.

音调反映声音的高低．它由振动的频率决定．频率越高，也就是说振动越快，音调就越高.

音色反映什么？笛子发出的声音和小提琴发出的声音，男士和女士发出的声音，即使响度相同、音调相同，听起来也有明显的差别．每个人讲话的声音也各有特点，与别的人不一样．这个特点就是音色.

音色是由振动的什么特点决定的呢？

声音一般都不是单一的，而是由许多不同频率的声波合成的．其中有一个频率最低的、振幅最大的声波，称为基音．设它的频率为 f，则周期 $T=\frac{1}{f}$，可以用正弦函数

$$y=A_1\sin(2\pi fx+\varphi_1)$$

来表示．除此之外还有许多其他频率的声波，它们的频率分别是基音频率 f 的整数倍 $2f$，$3f$，…，振幅随着频率的升高而降低，分别为 A_2，A_3，…，这些声波称为泛音，分别用正弦函数

$$y=A_2\sin(4\pi fx+\varphi_2),\quad y=A_3\sin(6\pi fx+\varphi_3),$$
$$\cdots,\quad y=A_k\sin(2k\pi fx+\varphi_k),\ \cdots$$

来表示．基音和所有的泛音合在一起，就是以上那些正弦函数的和

$$y=A_1\sin(2\pi fx+\varphi_1)+A_2\sin(4\pi fx+\varphi_2)+\cdots+A_k\sin(2k\pi fx+\varphi_k)+\cdots. \quad ①$$

由于各个正弦函数系数的比例不同，也就是各个泛音与基音的强弱的比例不同，就产生了不同的音色.

电子琴正是通过调整各个泛音响度的比例，来模拟各种不同的乐器（比如钢琴、小提琴、大提琴、长笛等）发出的声音.

为了体会按不同的响度比例将基音和泛音合成起来会产生什么效果，我们来观察不同频率的正弦函数按不同比例叠加起来得到的函数图象.

比如 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期分别是 2π，π. 它们有公共周期 2π，将它们加起来得到的函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 也有周期 2π. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 甚至 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{500}\sin 500x$ 都有周期 2π. 用计算机画出它们的图象，如图 1 所示.

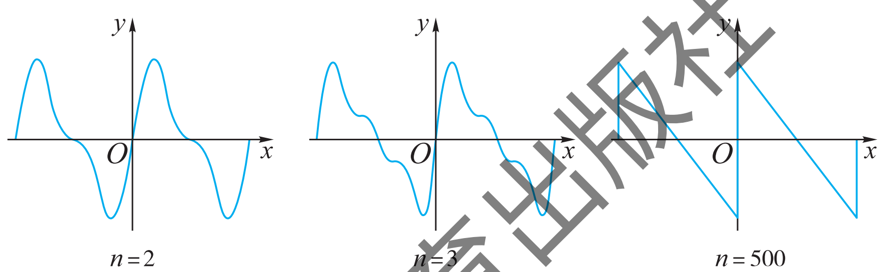


图 1　$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx$ 的图象

观察发现：随着 n 的增加，以 2π 为周期的函数

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx$$

的图象越来越接近于锯齿波，由区间 $[0, 2\pi]$ 上的一条线段向左右两方不断地平行移动 2π 个单位长度而得到. 这个锯齿波是由正弦波 $\sin kx(k\in \mathbf{N}_+)$ 分别乘以系数 $\frac{1}{k}$ 之后叠加起来的.

我们试试另外一种方案：

当 k 为奇数时，将 $\sin kx$ 乘 $\frac{1}{k}$，当 k 为偶数时，将 $\sin kx$ 乘 0，然后再加起来，得到下面的函数

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x,$$

它也具有周期 2π.

用计算机画出图形来，看看它们是什么形状(如图 2)：

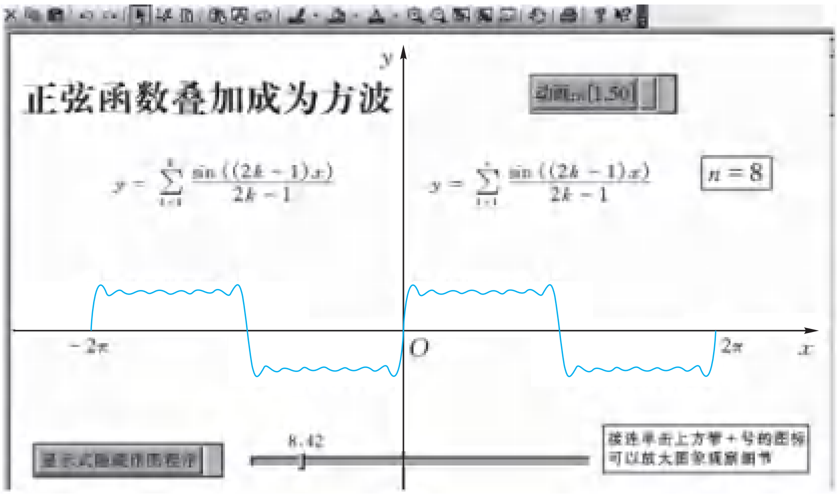


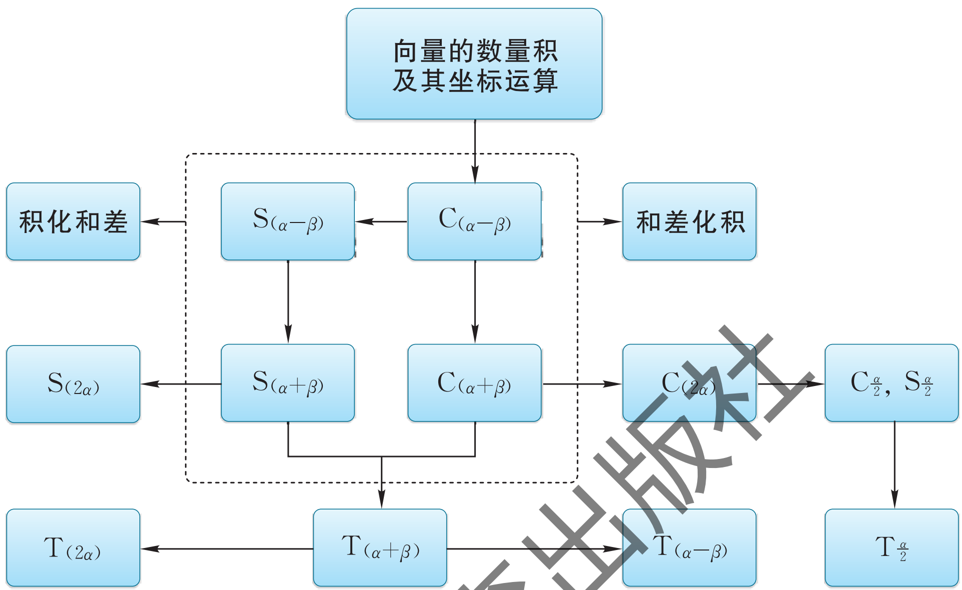
图 2　$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$ 的图象

观察的结果令你格外地惊奇：随着 n 的增加，函数图象接近于方形的波．也就是说，方波可以由正弦波叠加得出．

正弦波可以叠加出方波、锯齿波等．将具有周期 2π 的各个 $\sin kx(k\in\mathbf{N}_+)$ 以及 $\cos kx(k\in\mathbf{N}_+)$ 分别乘适当的系数再加起来，更换这些系数就可以得到各种不同形状的波．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．两角差的余弦公式是本章推导其他三角公式的出发点，你能借助向量来推导证明这个公式吗？你还能用其他方法来证明吗？

2．回忆本章所学公式，试回答：

（1）怎样由两角差的余弦公式推导出其他和角公式？

（2）怎样由和角公式推导出倍角公式？半角公式是由哪个公式推导出来的？

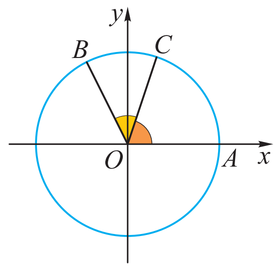
（3）从哪些公式可推导出积化和差公式？怎样由积化和差公式推导出和差化积公式？

3．三角恒等变换公式反映了角的加减运算引起三角函数值变化的规律，是研究三角函数性质及其应用的一种工具．试结合实例，综合运用三角函数知识来求解，进一步体会数学的整体性，并提高推理能力和运算能力．

复习题二

学而时习之

1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O 与 x 轴的正半轴交于点 A，点 $B(-1, 2)$在圆 O 上，点 C 在弧 AB 上，且$\angle BOC=\dfrac{\pi}{4}$，求 $\cos\angle AOC$ 的值.



（第 1 题）

2. 若 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$的值.

3. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=a$，$\cos\alpha-\sin\beta=b$，求 $\sin(\alpha-\beta)$的值.

4. 求$\dfrac{\sin 63^\circ-\sin 33^\circ\cos 30^\circ}{\cos 33^\circ}$的值.

5. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，且 $\alpha\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\cos\beta$ 的值.

6. （1）若 α，$\beta\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{7}$，求 $\alpha-\beta$ 的值；

（2）设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$的值.

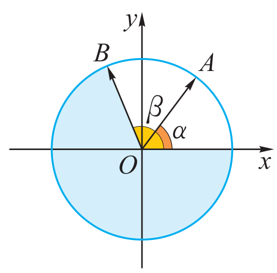
7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，求$\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$的值.

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 α 和钝角 β 的终边分别与单位圆交于 A，B 两点，且 A，B 两点的纵坐标分别为$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{12}{13}$.

（1）求 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 的值；

（2）求 $\cos(\beta-\alpha)$的值；

（3）求$\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$的值.



（第 8 题）

9. 由二倍角公式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 可知，$\cos 2\alpha$ 可用 $\cos\alpha$ 的二次多项式表示，从而推测 $\cos 3\alpha$ 可用 $\cos\alpha$ 的三次多项式表示，再结合 $\cos 54^\circ=\sin 36^\circ$，试计算 $\sin 18^\circ$的值.

10. 若 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

11. 若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，α 是第四象限角，求$\dfrac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}$的值.

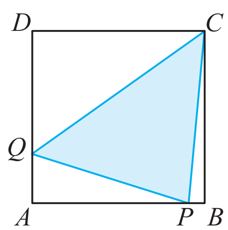
12. 求函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$的最大值.

13. 若关于 x 的方程$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$ 在$[0,\ 2\pi]$上恰有两个不同的实数解，求实数 a 的取值范围.

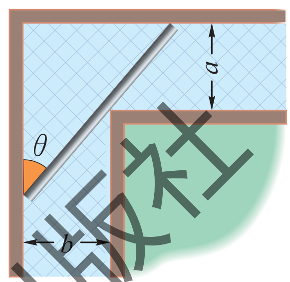
温故而知新

14. 若 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，P，Q 分别为边 AB，DA 上的点，当$\triangle APQ$ 的周长为 2 时，求$\angle PCQ$ 的大小.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，一个直角走廊的宽分别为 a，b，一铁棒与廊壁成 θ 角，该铁棒欲通过该直角走廊，求：

（1）铁棒长度 L(用含 θ 的表达式表示)；

（2）当 $a=b=2$ m 时，能够通过这个直角走廊的铁棒的长度的最大值.

17. 已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{3}{5}$，且 $x\in\left(\dfrac{17\pi}{12},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$，求$\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$的值.

18. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$.

（1）若 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，求函数 $f(x)$的值域；

（2）在$\triangle ABC$ 中，$a=1$，$c=\sqrt{2}$，且锐角 B 满足 $f(B)=1$，求 b 的值.

19. 在锐角$\triangle ABC$ 中，已知 $\boldsymbol{m}=(2\sin(A+C),\ \sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=\left(\cos 2B,\ 2\cos^2\dfrac{B}{2}-1\right)$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $AC=1$，求$\triangle ABC$ 面积的最大值.

20. 已知点 $P(\sqrt{3},\ 1)$，$Q(\cos x,\ \sin x)$，O 为坐标原点，函数 $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$.

（1）求函数 $f(x)$的解析式及最小正周期；

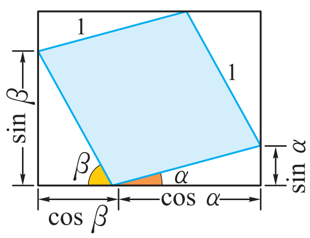
（2）若 A 为$\triangle ABC$ 的内角，$f(A)=4$，$BC=3$，求$\triangle ABC$ 周长的最大值.

上下而求索

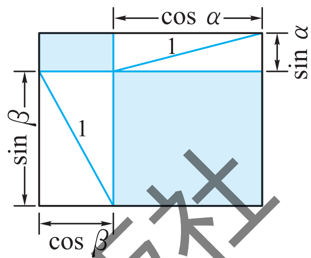
21. （1）利用角度为 30°的直角三角板与等腰直角三角板，拼接成不同的组合图形，计算 $\sin 15°$与 $\sin 75°$的值；

（2）将上述方法推广：推导出任意角 α 与 β 和（或差）的正弦公式.

22. “无字证明”，就是将数学命题用简单、有创意而且易于理解的几何图形来呈现，请利用图（1）、图（2）中阴影部分的面积关系，写出该图所验证的一个三角恒等变换公式：______________________________.



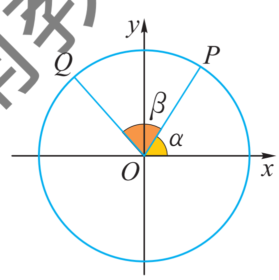
（1）



（2）

（第 22 题）

23. （数学探究活动）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的始边为 Ox，终边与单位圆交于点 P，角 β 的始边为 OP，终边与单位圆交于点 Q. 试利用勾股定理推导出角 α 与角 β 的和与差的四个正弦与余弦公式.



（第 23 题）

第3章

3 复　数

人类认识数的范围是一步一步扩充的．数系的每一次扩充，都意味着人类理性思维的一次飞跃．经过漫长的岁月，数系从自然数扩充到了实数．四百多年前，人们在求解方程时，引进了虚数单位 i 作为 $x^2=-1$ 的根，从而使数的范围扩充到了复数．

“虚数”并不虚，本章我们就将领略它的风采．而复数的引入不但成为数学理论不可或缺的一部分，更为人们解决实际问题提供了新的工具．

3.1 复数的概念

一 认识复数

人类认识数的范围是一步一步扩充的. 数系的每一次扩充，一方面是由于描述和解决实际问题的需要，另一方面也是基于解决数学自身矛盾的需要.

我们知道,在实系数范围内解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，需要将判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 开平方. 由于负实数在实数范围内没有平方根，因而当 $\Delta<0$ 时，一元二次方程就没有实数解.

因此，人们引入了一个符号 i 表示 -1 的一个平方根，满足条件 $\mathrm{i}^2=-1$，并对任意实数 a，b 引入形如 $a+b\mathrm{i}$ 的新数. 在这些新数组成的集合 $\mathbf{C}$ 中，引入加减乘除运算，并满足与实数运算类似的运算律.

按照新数集 $\mathbf{C}$ 中的运算，$b\mathrm{i}$ 就是实数 b 与 i 的乘积，$a+b\mathrm{i}$ 就是 a 与 $b\mathrm{i}$ 的和，每个负实数 b 在 $\mathbf{C}$ 中都有两个平方根 $\pm\sqrt{|b|}\mathrm{i}$. 因此，判别式 $\Delta<0$ 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 在 $\mathbf{C}$ 中都有两个不同的根

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\mathrm{i}.$$

更令人喜出望外的是，由实数集 $\mathbf{R}$ 扩充到数集 $\mathbf{C}$ 后，以 $\mathbf{C}$ 中的任意数为系数的一元 n 次方程在 $\mathbf{C}$ 中总是有根，不需要为解这些新的方程再添加更多的数. 通过解多项式方程来扩充数的范围，已经到此为止，圆满结束了.

人们引入 i 是需要用它来解决问题的，但又认为它不是真实的数，而是“虚幻”的数，故称其为虚数，并用“虚幻”的英文单词 imaginary 的首字母 i 来表示. 后来才发现，“虚数”并不虚，它在人们的生活、生产和科学研究中有着广泛的应用.

我们把形如 $a+b\mathrm{i}$(其中 a，$b\in\mathbf{R}$)的数称为**复数**，其中 a 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**实部**，b 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**虚部**，i 称为**虚数单位**.

> $a+b\mathrm{i}$ 可以看成是由实数部分 a 与虚数部分 $b\mathrm{i}$ 复合而成，因此称为复数.

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，这一表

示形式称为**复数的代数形式**．我们一般将复数 z 的实部记作$\mathrm{Re}\,z$，虚部记作 $\mathrm{Im}\,z$．

习惯上用 $\mathbf{C}$ 表示全体复数组成的集合(称为**复数集**)，于是 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\,|\,a，b\in\mathbf{R}\}$．

当虚部 $b=0$ 时，复数 $a+0\mathrm{i}$ 就是实数 a．反过来，实数 a 也就是虚部为 0 的复数 $a+0\mathrm{i}$．即实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的子集，且由 $\mathbf{C}$ 中虚部为 0 的全体复数组成．

当虚部 $b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 称为**虚数**，而当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，$b\mathrm{i}$ 称为**纯虚数**．

复数、实数、虚数、纯虚数之间的关系如下：

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i}\begin{cases}\text{实数}(b=0)，\\ \text{虚数}(b\neq0)(\text{当 } a=0 \text{ 时为纯虚数})．\end{cases}$$

例 1 求以下复数的实部和虚部：

(1) $1-\mathrm{i}$；　　(2) $3+2\sqrt{2}$；　　(3) $-\mathrm{i}$．

解 (1) $1-\mathrm{i}=1+(-1)\mathrm{i}$，实部为 1，虚部为 -1．

(2) $3+2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})+0\mathrm{i}$，实部为 $3+2\sqrt{2}$，虚部为 0．

(3) $-\mathrm{i}=0+(-1)\mathrm{i}$，实部为 0，虚部为 -1．

例 2 当 m 为何实数时，复数 $z=m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$ 分别是：

(1) 实数；　　(2) 虚数；

(3) 纯虚数；　　(4) 0?

解 (1) 当 $m^2-1=0$，即 $m=\pm1$ 时，复数 z 是实数．

(2) 当 $m^2-1\neq0$，即 $m\neq\pm1$ 时，复数 z 是虚数．

(3) 当 $m^2+m-2=0$ 且 $m^2-1\neq0$，即 $m=-2$ 时，复数 z 是纯虚数．

(4) 当 $m^2+m-2=0$ 且 $m^2-1=0$，即 $m=1$ 时，复数 $z=0$．

二　两个复数相等

若两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}(a，b，c，d\in\mathbf{R})$的实部与虚部分别相等，则称这两个复数**相等**，即

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d．$$

特别地，$a+b\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$.

例 3 设 x，$y\in\mathbf{R}$，若复数 $(2x-4y)+(3x+2)\mathrm{i}=5+6\mathrm{i}$，求 x，y.

解 根据复数相等的定义可得

$$\begin{cases}2x-4y=5,\\3x+2=6,\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3},\\y=-\dfrac{7}{12}.\end{cases}$

需要注意的是，两个实数可以比较大小，但当两个复数不全是实数时，它们之间不能比较大小①，只能说相等或不相等. 例如，$2-\mathrm{i}$ 和 $3+\mathrm{i}$，1 和 i 之间都不能比较大小.

练习

1. 求以下复数的实部和虚部：

(1) $\mathrm{i}-1$； (2) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$；

(3) $2-\sqrt{2}\mathrm{i}$； (4) $-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

2. 当实数 a 为何值时，复数 $z=(a^2+2a-3)+(a+3)\mathrm{i}$ 为纯虚数？

3. 求满足下列条件的实数 x，y 的值：

(1) $(3x-y)+(x+2)\mathrm{i}=x-y\mathrm{i}$；

(2) $xy-(x+y)\mathrm{i}=-24+5\mathrm{i}$.

4. 判断下列说法是否正确.

(1) $3+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 大于 $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

(2) 若复数 $z_1>z_2$，则 z_1，z_2 一定都是实数.

① 关于“不全是实数的两个复数不能比较大小”这一命题的证明，本书从略.

习题 3.1

学而时习之

1. 下列命题正确的是（　　）

（A）实数集与复数集的交集是空集

（B）任何两个复数都不能比较大小

（C）任何复数的平方均非负

（D）虚数集与实数集的并集为复数集

2. 以 $2\mathrm{i}-\sqrt{5}$ 的虚部为实部，以 $\sqrt{5}\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2$ 的实部为虚部的新复数为（　　）

（A）$2-2\mathrm{i}$　　（B）$2+\mathrm{i}$

（C）$-\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}$　　（D）$\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}$

3. 复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数是 $a=0$ 的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分又不必要条件

4. 求 m 为何实数时，复数 $z=m^2+m-6+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$ 是：

（1）实数；　（2）纯虚数；　（3）虚数.

5. 求满足下列条件的实数 a，b 的值：

（1）$(a-3b)+(2a+3b)\mathrm{i}=5+\mathrm{i}$；

（2）$(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}=6\mathrm{i}-8$.

温故而知新

6. 求实数 m，n 满足何条件时，复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$ 是：

（1）纯虚数；　（2）实数.

7. 求使不等式 $\lambda^2-(\lambda^2-3\lambda)\mathrm{i}<(\lambda^2-4\lambda+3)\mathrm{i}+10$ 成立的实数 λ 的取值范围.

3.2 复数的四则运算

建立了复数的概念以后，一个很重要的问题就是复数之间如何运算.

由于任意两个实数进行加、减、乘、除运算（做除法时除数不为 0）仍得到实数，因此由实数集扩充得到的复数集里的各种运算应当和实数集里的运算是一致的.

一 复数的加减法

复数的加法按照以下规定的法则进行：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）是任意两个复数，则它们的和是

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.$$

两个复数的和依然是一个复数，它的实部是原来两个复数实部的和，它的虚部是原来两个复数虚部的和.

容易验证，复数的加法满足交换律和结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

复数减法是加法的逆运算，即复数 $a+b\mathrm{i}$ 减去复数 $c+d\mathrm{i}$ 的差是指满足 $(c+d\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$ 的复数 $x+y\mathrm{i}$，记作 $(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})$. 根据复数相等的定义得

$$c+x=a,\ d+y=b.$$

所以

$$x=a-c,\ y=b-d.$$

因此

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

两个复数的差还是一个复数，它的实部是原来两个复数实部的差，它的虚部是原来两个复数虚部的差.

例 1 已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$ 与 $z_2=4-3\mathrm{i}$，试求它们的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2.

解 $z_1+z_2=(1+2\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})$

$=(1+4)+(2-3)\mathrm{i}$

$=5-\mathrm{i}$，

$z_1-z_2=(1+2\mathrm{i})-(4-3\mathrm{i})$

$=(1-4)+[2-(-3)]\mathrm{i}$

$=-3+5\mathrm{i}$.

二 复数的乘法与乘方

复数的乘法规定为

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

乘法运算的结果可以用多项式的乘法运算得出：

$$\begin{aligned}&(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\\=&ac+bc\mathrm{i}+ad\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\=&ac+bc\mathrm{i}+ad\mathrm{i}+(-1)bd\\=&(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

两个复数的乘积还是一个复数.

复数的乘法与多项式的乘法相类似，只是在运算过程中要把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并.

复数的乘法满足交换律、结合律以及分配律，即对任何复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

复数的乘方运算是指几个相同复数相乘. 在复数集中，实数集中的正整数指数幂运算律仍然成立，即对任何复数 z，z_1，z_2 及正整数 m，n，有

$$z^m\cdot z^n=z^{m+n},$$

$$(z^m)^n=z^{mn},$$

$$(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n.$$

规定 $\mathrm{i}^0=1$.

特别地，我们有以下常用结果：

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4=1,$$

$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n}=1，其中\ n\in\mathbf{Z}.$$

例 2 计算：

(1) $(1+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$；　(2) $(1+\mathrm{i})^2$；　(3) $(1-\mathrm{i})^2$；　(4) $(1+\mathrm{i})^{1\,000}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&(1+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})\\&=1\times4+1\times(-3\mathrm{i})+2\mathrm{i}\times4+2\mathrm{i}\times(-3\mathrm{i})\\&=4-3\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2\\&=4-3\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6\times(-1)\\&=10+5\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(2) $(1+\mathrm{i})^2=1^2+2\cdot1\cdot\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$.

(3) $(1-\mathrm{i})^2=1^2-2\cdot1\cdot\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1-2\mathrm{i}-1=-2\mathrm{i}$.

(4) 由(2)得，
$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{1\,000}&=[(1+\mathrm{i})^2]^{500}\\&=(2\mathrm{i})^{500}\\&=2^{500}\cdot\mathrm{i}^{500}\\&=2^{500}\cdot1\\&=2^{500}.\end{aligned}$$

三　复数的除法

我们已经会做复数的加、减、乘法，那么，对任意两个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 和 $z_2=c+d\mathrm{i}(c,\ d\in\mathbf{R})$，当 $z_2\neq0$ 时能否做除法求它们的商 $\frac{z_1}{z_2}$？为此，只要将商 $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 的分子、分母同乘以适当的非零复数，将分母化为实数即可.

注意到
$$(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=c^2-d^2\mathrm{i}^2=c^2+d^2,$$
当 $c+d\mathrm{i}\neq0$ 时，实数 c，d 不同时为 0，则 $c^2+d^2>0$. 因此，将商 $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 的分子、分母同乘以 $c-d\mathrm{i}$ 就可将分母化为正实数 c^2+d^2，从而将商化为复数的标准形式.
$$\begin{aligned}\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}&=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\\&=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此，对任意两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}$，且 $c+d\mathrm{i}\neq0)$，有

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

两个复数的商仍为复数.

例 3 已知复数 $z_1=1+2i$，$z_2=4-3i$，求 $\frac{1}{z_2}$ 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 $\frac{1}{z_2}=\frac{1}{4-3i}=\frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{4+3i}{4^2+3^2}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i.$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{4-3i}=\frac{(1+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{4+3i+8i-6}{4^2+3^2}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i,$

或 $\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=(1+2i)\left(\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i\right)$

$=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i+\frac{8}{25}i-\frac{6}{25}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i.$

一般地，$\frac{1}{z}$ 称为 z 的倒数，若 $z=a+bi\neq0$，则 $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

例 4 在复数范围内解下列方程：

（1）$x^2=-3$；　　　　（2）$x^3=1$.

解 （1）因为 $(\pm\sqrt{3}i)^2=(\sqrt{3})^2i^2=3\times(-1)=-3$，

所以 $\pm\sqrt{3}i$ 是方程 $x^2=-3$ 的两个根，也就是 -3 的两个平方根.

即　$x=\pm\sqrt{3}i$.

（2）原方程可化为 $x^3-1=0$. 方程左边可分解因式：

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

因此，原方程可变形为 $(x-1)(x^2+x+1)=0$.

即 $x-1=0$ 或 $x^2+x+1=0$.

若 $x-1=0$，则

$$x=1.$$

若 $x^2+x+1=0$，则

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}.$$

又 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{3}{4}$，所以

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

即　$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

于是方程 $x^3=1$ 在复数范围内有三个根，分别为 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

> 一般地，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 当 $\Delta<0$ 时在复数范围内的根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{|b^2-4ac|}i}{2a}$.

练 习

1. 化简下列各式：

(1) $(-2-4i)-(-2+i)+(3+9i)$；　　(2) $(3+i)(3-i)$；

(3) $(1-i)^4$；　　(4) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

2. 已知 $m\in\mathbf{R}$，且 $(m+mi)^6=-64i$，求 m 的值.

3. 在复数范围内解下列方程：

(1) $x^2+2x+3=0$；　　(2) $x^2-4x+5=0$.

习题 3.2

学而时习之

1. 设 $z_1=3-2i$，$z_2=5+4i$，求 z_1+z_2，z_1-z_2，z_1z_2 的值.

2. 设 $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，求 z^2，z^3 及 z^2+z+1 的值.

3. 已知 $a=\dfrac{-3-i}{1+2i}$，求 $\dfrac{1}{a}$，a^4 的值.

4. 化简：$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,021}$.

5. 解方程：$2x^2-x+1=0$.

温故而知新

6. 根据下列条件，求 z.

(1) $z(1+i)=2$；　　(2) $z-1+zi=-4+4i$.

7. 设 x，y 为实数，且 $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$，求 $x+y$ 的值.

8. 利用公式 $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$，把下列各式分解为一次因式的乘积：

(1) x^2+9；　　(2) a^4-b^4；

(3) $a^2+2ab+b^2+c^2$；　　(4) x^2+5x+6.

9. 已知复数 $z=3+bi(b\in\mathbf{R})$，且 $(1+3i)\cdot z$ 为纯虚数. 若 $w=\dfrac{z}{2+i}$，求复数 w.

3.3 复数的几何表示

我们知道，每个实数 a 均与数轴上的点一一对应．若以数轴原点为起点，将方向为数轴的正方向、长度等于单位长度的向量记为 $\boldsymbol{e}$，则每个实数 a 都可用平行于数轴的向量 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$ 来表示，如图 3.3－1．这就是实数的几何意义．

图 3.3－1

类比实数的几何表示，复数有什么几何意义？复数加减法的几何意义又是什么呢？

一　复数的几何意义

根据复数相等的定义，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，都可以由一个有序实数对 $(a，b)$ 唯一确定，而有序实数对 $(a，b)$ 与平面直角坐标系中的点是一一对应的．因此，在平面上建立直角坐标系，以每个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的实部 a 和虚部 b 组成坐标 $(a，b)$，这就确定了唯一一点 $Z(a，b)$，连接 OZ，这就确定了唯一一个向量 $\overrightarrow{OZ}$，这个向量的坐标也是 $(a，b)$，如图 3.3－2．因此，复数 $a+b\mathrm{i}$ 可用平面内唯一一点 $Z(a，b)$ 表示，也可用平面内唯一向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示，这就在复数集与平面内的点的集合之间建立了一一对应关系，也在复数集与平面内的全体向量所成的集合之间建立了一一对应关系．

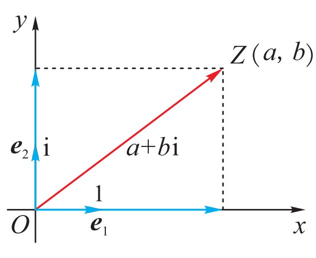


图 3.3－2

按上述方式与全体复数建立一一对应关系的平面叫作**复平面**，x 轴叫作**实轴**，y 轴叫作**虚轴**．实轴上的点都表示实数．除原点外，虚轴上的点都表示纯虚数．

特别地，如图 3.3－2，数 1 用沿 x 轴正方向的单位向量

> 1831 年，高斯系统地表述了复数 $a+b\mathrm{i}$ 与笛卡儿直角坐标平面上的点的一一对应关系，从而进一步肯定了复平面这一概念．后人也将复平面称为高斯平面．

$\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$表示，数 i 用沿 y 轴正方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_2=(0, 1)$表示．设复平面上的向量$\overrightarrow{OZ}$的坐标为(a, b)，则$\overrightarrow{OZ}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$，将这个表达式中的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$分别换成 1，i，就得到$\overrightarrow{OZ}$所对应的复数为 $a+b\mathrm{i}$．

例 1　(1) 在复平面上画出与以下复数 z_1，z_2，z_3，z_4分别对应的点 P_1，P_2，P_3，P_4．

$$z_1=1,\ z_2=\mathrm{i},\ z_3=4+3\mathrm{i},\ z_4=4-3\mathrm{i}.$$

(2) 求向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_4}$的模．

(3) 点 P_1，P_2，P_3，P_4 中是否存在两个点关于实轴对称？若存在，则它们所对应的复数有什么关系？

解　(1) 由题意可得图 3.3－3．

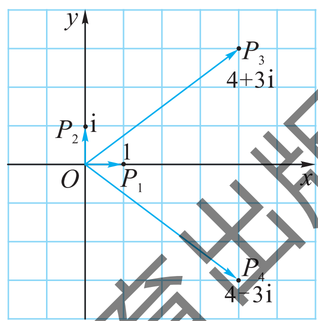


图 3.3－3

(2) 由于 P_1，P_2，P_3，P_4的坐标分别为(1，0)，(0，1)，(4，3)，(4，－3)，则向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_4}$的模分别为

$$|\overrightarrow{OP_1}|=1,\quad |\overrightarrow{OP_2}|=1,$$
$$|\overrightarrow{OP_3}|=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$
$$|\overrightarrow{OP_4}|=\sqrt{4+(-3)^2}=5.$$

> 一般地，由对应复数 $a+b\mathrm{i}$ 的向量$\overrightarrow{OP}$的坐标(a, b)可求出其模长为$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

(3) 点 $P_3(4, 3)$，$P_4(4, -3)$关于实轴对称，它们所对应的复数 $4+3\mathrm{i}$ 与 $4-3\mathrm{i}$ 的实部相同，虚部互为相反数．

二　复数的模与共轭复数

对任意复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，我们将它在复平面上所对应的向量的模 $\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 z 的**模**，也称为 z 的绝对值，记作$|z|$．写成公式，即

$$|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$表示点(a, b)到原点的距离．

> 想一想，当复数 z 是实数时，用这个公式算出的$|z|$是否与以前熟悉的绝对值一致？

例 2 设 $z\in\mathbf{C}$，点 Z 对应复数 z，在复平面内满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

（1）$|z|=2$；　　　　　　（2）$2\leqslant|z|\leqslant3$.

解　（1）复数 z 的模等于 2，这表明，复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度等于 2，即点 Z 到原点 O 的距离等于 2，因此满足条件 $|z|=2$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 2 为半径的圆.

（2）不等式 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 可以化为不等式组

$$\begin{cases}|z|\leqslant3,\\|z|\geqslant2.\end{cases}$$

不等式 $|z|\leqslant3$ 的解集是圆 $|z|=3$ 和该圆内部所有的点构成的集合；不等式 $|z|\geqslant2$ 的解集是圆 $|z|=2$ 和该圆外部所有的点构成的集合. 这两个集合的交集，即上述不等式组的解集，也就是满足条件 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 的点 Z 的集合.

因此，所求的集合是以原点 O 为圆心，以 2 和 3 为半径的两圆所夹的圆环，并包括圆环的边界（如图 3.3－4）.

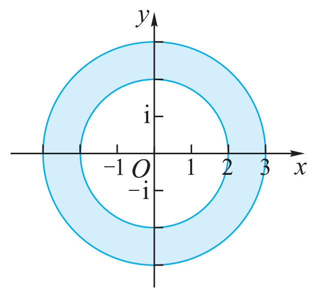


图 3.3－4

对任意复数 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$，如果保持它的实部 a 不变，将虚部 b 变成它的相反数 $-b$，得到的复数 $a-bi$ 称为原复数 z 的**共轭复数**，记为 $\overline{z}$. 即

$$\overline{a+bi}=a-bi.$$

反过来也有 $\overline{a-bi}=a+bi$，因此 $\overline{\overline{z}}=z$.

于是，例 1 中（3）的结论可以推广为：

复平面上两点 P，Q 关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow$ 它们所对应的复数相互共轭.

共轭复数的模一定相等吗？

例 3 分别求复数 $z_1=2+3i$ 和 $z_2=3-4i$ 的共轭复数 $\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$，并分别比较 $z_1\cdot\overline{z_1}$ 与 $|z_1|^2$，$z_2\cdot\overline{z_2}$ 与 $|z_2|^2$ 的大小.

解　由题设可得，复数 $z_1=2+3i$ 的共轭复数 $\overline{z_1}=2-3i$，复数 $z_2=3-4i$ 的共轭复数 $\overline{z_2}=3+4i$.

因而

$$z_1\cdot\overline{z_1}=(2+3i)(2-3i)=13=|z_1|^2,$$
$$z_2\cdot\overline{z_2}=(3-4i)(3+4i)=25=|z_2|^2.$$

根据复数的乘法法则，对任何复数 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$，有

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2+(ab-ab)i=a^2+b^2,$$

因此，共轭复数 z 与 $\overline{z}$ 的积是一个实数，并且等于这个复数的模的平方，即

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2.$$

三 复数加减法的几何意义

如图 3.3－5，设复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a, b, c, d\in\mathbf{R})$分别对应向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，则$\overrightarrow{OP}=(a, b)$，$\overrightarrow{OQ}=(c, d)$.

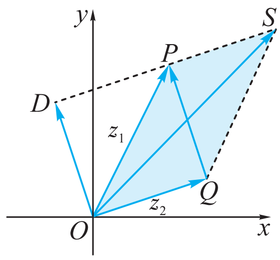


图 3.3－5

由平面向量的坐标运算得，$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$ 就对应向量$\overrightarrow{OS}=(a+c, b+d)=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，且 OS 是以 OP，OQ 为邻边的平行四边形的对角线．即复数 z_1，z_2 的加法由对应向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$的加法来表示，且复数加法的几何意义就是向量加法的平行四边形法则.

类似地，复数的减法由对应向量的减法来表示：

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{OD}=(a-c, b-d)=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP},$$

其中，$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{QP}$同向平行且长度相等，如图 3.3－5.

复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与任一实数 k 相乘，其积所对应的向量$\overrightarrow{OM}$可由复数 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$与 k 的积表示：

$$kz=ka+kb\mathrm{i}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(ka, kb)=k\overrightarrow{OP}.$$

这就是说，实数 k 与复数 z 相乘就可由实数 k 与该复数对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的数乘来表示.

例 4 如图 3.3－6，已知复平面上的▱$OACB$，O 是原点，A，B 分别对应复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，M 是 OC，AB 的交点．求点 C，M 对应的复数.

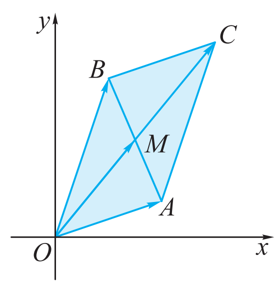


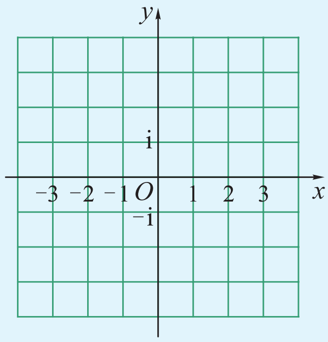
图 3.3－6

解 由于$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别对应复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为$(3+\mathrm{i})+(2+4\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$，即点 C 所对应的复数.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为$\frac{1}{2}(5+5\mathrm{i})=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$，即点 M 所对应的复数.

练习

1. 在如图所示的复平面内分别作出复数 $z_1=1+\sqrt{3}i$ 和 $z_2=1-\sqrt{3}i$ 的对应点，这两点关于哪条轴对称？



（第 1 题）

2. 设 $z\in\mathbf{C}$，$2\leqslant|z|\leqslant5$，建立复平面并画出满足条件的点构成的图形.

3. 设 $z_1=3-4i$，$z_2=-2+3i$，求 $\overline{z_1}-\overline{z_2}$ 在复平面内对应的点位于第几象限.

4. 在复平面内，复数 $1+i$ 与 $1+3i$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，其中 O 为坐标原点，求线段 AB 的中点所对应的复数.

习题 3.3

学而时习之

1. 若复数 $z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)i$ 对应的点在虚轴上，求实数 a 应满足的条件.

2. 若复数 $(-3+k^2)-(k^2-2)i$ 对应的点在第三象限内，求实数 k 的取值范围.

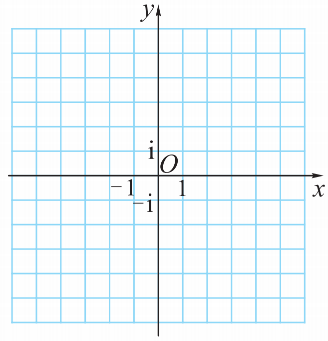
3. 设 $z\in\mathbf{C}$，则满足条件 $3<|z|<4$ 的点 Z 的集合是什么图形？

4. 已知复数 $-1+i$，$-3-4i$，$4+3i$，$4i$，$-\sqrt{5}i$.

（1）在如图所示复平面内，作出各复数对应的向量；

（2）求各复数的模；

（3）求各复数的共轭复数，并在复平面内作出这些共轭复数对应的向量.



（第 4 题）

5. 已知$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$对应的复数分别为$-1+2\mathrm{i}$，$-2-3\mathrm{i}$，通过几何作图求出这两个复数和与差对应的向量.

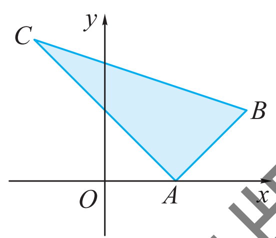
温故而知新

6. 复数$z=(m+1)+(m-1)\mathrm{i}$对应的点在直线$x+y-4=0$上，求实数m的值.

7. 若$z\cdot\overline{z}-3\mathrm{i}\,\overline{z}=1+3\mathrm{i}$，求$z$.

8. 根据复数的几何意义证明：$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

9. 如图，在复平面内，A，B，C三点对应的复数分别为1，$2+\mathrm{i}$，$-1+2\mathrm{i}$.



（第 9 题）

（1）求向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}$对应的复数；

（2）判断$\triangle ABC$的形状；

（3）求$\triangle ABC$的面积.

*3.4 复数的三角表示

一 $i^2=-1$ 的几何意义

如图 3.4-1，设平面向量$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$对应复数 $z=x+yi$，则$\overrightarrow{OQ}=(-x,\ -y)$对应复数$-z=(-1)z$. 由于$\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OP}=(-1)\overrightarrow{OP}$，因此$\overrightarrow{OQ}$可由$\overrightarrow{OP}$绕起点 O 逆时针旋转 180°得到.

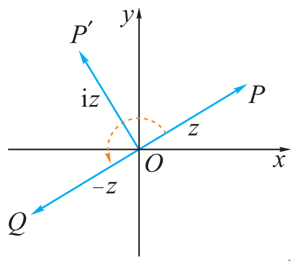


图 3.4-1

本节所说的“旋转”均为“逆时针旋转”.

于是，由$(-1)z=-z$ 可知，-1 乘复数 z 的几何意义是将复数 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$绕起点旋转 180°变成$\overrightarrow{OQ}$.

按照这样的思路，将 z 连乘两个 -1 得到$(-1)^2z$，就是将$\overrightarrow{OP}$连续旋转两个 180°，也就是旋转 360°，仍得到$\overrightarrow{OP}$自己. 这就是说$(-1)^2\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}$，$(-1)^2z=z$，$(-1)^2=1$.

按照左边的几何解释，乘-1 就是向后转，乘$(-1)^2$ 就是后转两次，转回原来的方向，相当于不转. 这样就容易理解$(-1)^2=1$ 了.

既然用$(-1)^2$ 乘复数 z 的几何意义是将复数 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$ 旋转两个 180°，很自然会猜测：用-1 的一个平方根 i 乘 z 的几何意义应该是将$\overrightarrow{OP}$旋转半个 180°，也就是旋转 90°，得到的向量$\overrightarrow{OP'}$与复数 iz 对应.

下面我们来验证上述猜测是否正确.

由于每个虚数 $z=x+yi(x,\ y\in\mathbf{R},\ y\neq 0)$可以分解为实数 x 与纯虚数 yi 之和，因而我们先来讨论实数或纯虚数乘 i 的几何意义.

例 1 将正实数 a 连续四次乘 i 得到 ai，$-a$，$-ai$，a，并将这些数用复平面上的点 B，C，D，A 表示. 观察这些点的相互位置关系，你发现了什么?

* 本节为选学内容.

解　由于 a，$a\mathrm{i}$，$-a$，$-a\mathrm{i}$ 的模都等于 a，且它们在复平面上对应的向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ 的模都等于 a，方向分别为 x 轴正方向、y 轴正方向、x 轴负方向、y 轴负方向，如图 3.4－2．将 $\overrightarrow{OA}$ 依次旋转 90°，旋转四次，则依次得到 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}$．于是，可发现向量每旋转 90°，其所对应的复数就相应乘 i．

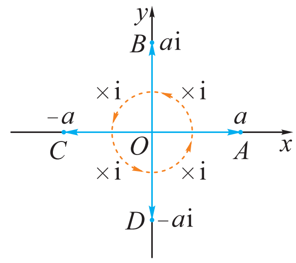


图 3.4－2

例 2　如图 3.4－3，设复平面上的点 P 表示复数 $z=a+b\mathrm{i}$，将点 P 绕原点 O 旋转 90°得到的点 P' 表示哪一个复数？

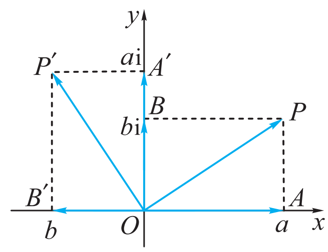


图 3.4－3

解　设向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别表示 a，$b\mathrm{i}$，由 $z=a+b\mathrm{i}$ 知 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$OP$ 是矩形 $OAPB$ 的对角线.

将矩形 $OAPB$ 绕原点 O 旋转 90°，则 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别变成 $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，矩形 $OAPB$ 变成矩形 $OA'P'B'$．于是 $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$ 所对应的复数应分别由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 所对应的复数乘 i 得到，即 $\overrightarrow{OA'}$ 对应的复数为 $\mathrm{i}\cdot a=a\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OB'}$ 对应的复数为 $\mathrm{i}(b\mathrm{i})=-b$.

因此，矩形 $OA'P'B'$ 的对角线表示的向量 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ 所对应的复数为 $a\mathrm{i}-b=-b+a\mathrm{i}$，即点 P' 表示复数 $-b+a\mathrm{i}$.

例 2 中 $\overrightarrow{OP'}$ 可直接由 $\overrightarrow{OP}$ 旋转 90°得到，且其对应的复数 $-b+a\mathrm{i}=\mathrm{i}\cdot a+\mathrm{i}(b\mathrm{i})=\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})$，也可直接由 $\overrightarrow{OP}$ 对应的复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 乘 i 得到.

由此可得：

> **虚数单位 i 乘任意复数 z 的几何意义是：将复数 z 对应的平面向量旋转 90°.**

例 3　将平面直角坐标系中任意点 $P(x,\ y)$ 绕原点 O 旋转 90°得到 P'，求 P' 的坐标.

解　因为点 $P(x,\ y)$ 对应的复数为 $x+y\mathrm{i}$，

所以将点 $P(x,\ y)$ 绕原点 O 旋转 90°，对应的复数为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})&=x\mathrm{i}-y\\&=-y+x\mathrm{i},\end{aligned}$$

因此点 P' 的坐标为 $(-y,\ x)$.

二 旋转任意角

前面已经知道，把复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 分别旋转 90°和 180°，相当于将复数 z 分别乘复数 i 和 -1，如果要将向量 $\overrightarrow{OP}$ 旋转任意角度，又是用哪个复数乘 z 呢？

当 $\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$ 时，$\overrightarrow{OP}$ 对应的复数是 0，无论乘哪个复数仍是 0. 因而以下只考虑 $\overrightarrow{OP}\neq\mathbf{0}$ 的情形.

如图 3.4－4，把复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 旋转角 α 得到 $\overrightarrow{OP'}$，把 $\overrightarrow{OP}$ 旋转 90°得到 $\overrightarrow{OQ}$，则由平面向量基本定理可知，$\overrightarrow{OP'}$ 可写成 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的实数倍之和，即 $\overrightarrow{OP'}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$.

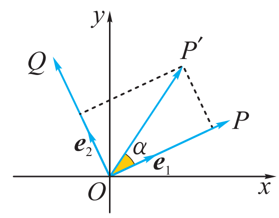


图 3.4－4

设 $r=|OP|$，则 $|OP'|=|OQ|=r$，$\overrightarrow{OP}=r\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OQ}=r\boldsymbol{e}_2$.

所以
$$\cos\alpha=\frac{a}{r}，\ \sin\alpha=\frac{b}{r}，$$

即
$$a=r\cos\alpha，\ b=r\sin\alpha.$$

于是
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'}&=(r\cos\alpha)\boldsymbol{e}_1+(r\sin\alpha)\boldsymbol{e}_2\\&=\cos\alpha\cdot\overrightarrow{OP}+\sin\alpha\cdot\overrightarrow{OQ},\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{OP'}$ 对应的复数为 $\cos\alpha\cdot z+\sin\alpha\cdot \mathrm{i}z$，可看作是由 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 乘 z 得到的.

用 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 乘任意复数 z，其几何意义是：将复数 z 对应的平面向量旋转角 α.

例 4 根据 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 乘任意复数 z 的几何意义计算：

（1）$(\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°)^2$；　　（2）$(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)^3$.

解　（1）设 $w=\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°$，则用 w 乘任意复数 z，其几何意义是将 z 对应的向量旋转 45°. 于是，用 w^2 乘 z 的几何意义是将 z 对应的向量连续旋转两个 45°，也就是将 z 对应的向量旋转 90°. 又由虚数单位 i 乘任意复数 z 的几何意义可知，

$$w^2=\mathrm{i}，即\ (\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°)^2=\mathrm{i}.$$

（2）设 $w=\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°$，则用 w 乘任意复数 z，其几何意义是将 z 对应的向量旋转 120°. 同理可得，用 w^3 乘任意复数 z 就是将 z 对应的向量连续旋转三个 120°，其结果就是将 z 对应的向量旋转 360°后回到原处，因而

$$(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)^3=1.$$

三 复数的三角表示

如图 3.4－5，将任意复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$在复平面内用对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示出来，则 $|\overrightarrow{OP}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

我们将以 x 轴的正半轴为始边，以 OP 为终边的角 θ，称为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的**辐角**，记作 $\arg z=\theta$，如图 3.4－5.

若 θ 是 z 的一个辐角，则 z 的全部辐角 $\arg z=\theta+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

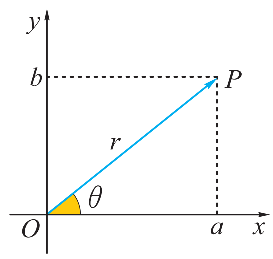


图 3.4－5

从图 3.4－5 可以看出：

$$\begin{cases} a=r\cos\theta, \\ b=r\sin\theta, \end{cases}$$

所以
$$\begin{aligned} a+b\mathrm{i} &= r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta \\ &= r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$.

我们将 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**三角形式**.

如果 $z=0$，则 $|z|=0$，辐角 θ 可以取任意值，对每个值仍有 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

因此，两个复数 $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=|z_2|(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$相等的充分必要条件是

$$|z_1|=|z_2|=0，\text{或} |z_1|=|z_2|>0 \text{ 且 } \theta_2=\theta_1+2k\pi，k\in\mathbf{Z}.$$

例 5 把下列复数的代数形式化成三角形式：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$； (2) i.

分析 求一个非零复数的三角形式，只要求出这个复数的模，然后再找出该复数的一个辐角即可.

解 (1) 因为 $r=\sqrt{3+1}=2$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限内，

因而 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2) 因为 $r=1$，而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$.

四 复数三角形式的运算

两个复数 z_1，z_2 相乘，有什么几何意义？

将复数 z_1，z_2 分别写成三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

画出 z_1，z_2 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$(如图 3.4－6)，z_1 乘 z_2 可分两步实现：

首先，用 $\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1$ 乘 z_2，得到 $w=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)z_2$，$w$ 对应的向量$\overrightarrow{OP}$由 z_2 对应的向量$\overrightarrow{OZ_2}$ 旋转角 θ_1 得到，此时模 $|w|=|\overrightarrow{OP}|=|z_2|=r_2$，辐角$\angle xOP=\theta_1+\theta_2$.

然后，用 r_1 乘 w，得到 $r_1\cdot(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)z_2=z_1z_2$，$z_1z_2$ 对应的向量$\overrightarrow{OQ}$由 w 对应的向量$\overrightarrow{OP}$乘实数 r_1 而伸缩得到，此时模$|z_1z_2|=r_1|\overrightarrow{OP}|=r_1r_2$，辐角$\angle xOQ=\angle xOP=\theta_1+\theta_2$.

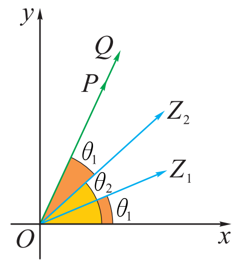


图 3.4－6

由此得复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$与 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$的乘法公式：

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

上式表明，两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，乘积的辐角等于它们的辐角之和.

以上公式也可以直接做复数乘法而得到：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

其中用到余弦和正弦的和角公式.

上面的结论可以推广到 n 个复数相乘的情形，就是

$$z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)],$$

其中$n\in\mathbf{N}_+$.

如果 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$，$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$，则有

$$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\text{，其中 }n\in\mathbf{N}_+\text{①}.$$

例 6 求$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{100}$.

解 先将 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 化为三角形式，得 $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$，则

① 这个式子称为棣莫弗公式，是数学中一个非常重要的公式.

$$原式=2^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{100\pi}{6}\right)$$
$$=2^{100}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=2^{99}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

如果没有特别说明，计算结果一般保留代数形式.

当 $z_2\neq0$ 即 $r_2>0$ 时，设它们的商的三角形式为 $w=\frac{z_1}{z_2}=|w|(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，则由 $z_1=wz_2$ 得 $r_1=|w|r_2$，$\theta_1=\alpha+\theta_2$，因此 $|w|=\frac{r_1}{r_2}$，$\alpha=\theta_1-\theta_2$.

由此可得两个复数 z_1，$z_2(z_2\neq0)$ 的除法公式：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

上式表明，两个复数相除（除数不为 0），商的模等于它们的模的商，商的辐角等于它们的辐角之差.

例 7 计算：$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

解 $$原式=\frac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2(0+\mathrm{i})$$
$$=2\mathrm{i}.$$

例 8 解方程 $x^3=1$，并将其所有的根用复平面上的点表示，观察以这些点为顶点的多边形是什么形状.

解 设 $x=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$r>0$，则

$$x^3=r^3(\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta)=1=\cos2k\pi+\mathrm{i}\sin2k\pi$$
$$\Leftrightarrow r^3=1 且 3\theta=2k\pi$$
$$\Leftrightarrow r=1 且 \theta=\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z}).$$

由于正弦、余弦函数的周期均是 2π，为避免复数根重复，θ 只在 $[0,2\pi)$ 范围内

取值，于是 k 取 0，1，2 三个值，得三个不同的根

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

在复平面上画出表示这三个根的点 P_1，P_2，P_3，如图 3.4－7 所示.

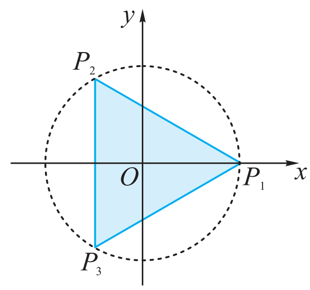


图 3.4－7

观察发现，以这三点为顶点的 $\triangle P_1P_2P_3$ 是以原点 O 为圆心的单位圆的内接正三角形，三个顶点等分圆周.

练 习

1. 把下列复数化为三角形式：-3，$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

2. 计算：

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$；

(2) $8(\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ)\div 2(\cos 150^\circ-\mathrm{i}\sin 150^\circ)$.

3. 利用复数的三角形式计算 $(1-\mathrm{i})^{1\,000}$.

多知道一点

复数的方根

复数写成三角形式后，乘除法就变成模的乘除法和辐角的加减法. 复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方就变成模的 n 次方和辐角乘 n，即 $[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$，$n\in\mathbf{N}_+$，那么复数开 n 次方是什么形式呢？

设 $\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 是复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 次方根，那么

$$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=[\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi).$$

因为相等的复数的模相等，其辐角可以相差 2π 的整数倍，所以

$$\rho^n=r,\ n\varphi=\theta+2k\pi(k\in\mathbf{Z}),\ 即\ \rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

因此 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$，其中 k 取 0，1，…，$n-1$. 这是由于正弦、余弦函数的周期都是 2π，所以当 k 取 n，$n+1$，…时，又会重复出现 k 取 0，1，…，$n-1$ 时的结果.

由上可知，复数的 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 次方根是 n 个复数. 如例 8 中，我们已在复数范围内求出 1 有三个不同的立方根，你能写出 1 在复数范围内的 n 个 n 次方根吗？

习题 3.4

学而时习之

1. 将下列复数化为三角形式：

(1) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$；　　(2) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；

(3) $-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$；　　(4) $2\left(\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}\right)$.

2. 化简：

(1) $16\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$；

(2) $8(\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ)\div 2(\cos 210^\circ-\mathrm{i}\sin 210^\circ)$.

3. 已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$，z^2 的虚部为 2，z 在复平面上所对应的点 A 在第一象限.

(1) 求 z；

(2) 若 z^2，$z-z^2$ 在复平面上的对应点分别为 B，C，求 $\cos\angle ABC$.

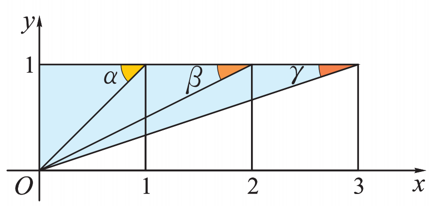
温故而知新

4. 将下列复数化为三角形式：

(1) $\sin\frac{5\pi}{7}-\mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{7}$；　　(2) $\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha$.

5. 将复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量旋转 $-\frac{\pi}{3}$，求所得向量对应的复数.

6. 如图，已知平面内有并列的三个全等的正方形，利用复数证明 $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=\frac{\pi}{2}$.



（第 6 题）

数学文化

数系扩充简史

自然数的原始概念在人类的文字尚未出现时即已形成．例如，前人清点猎物的数目，拿过一只猎物就扳一个指头，或在地上放一颗石子，或在绳子上打一个结．这些事物的多寡都是自然形成的，所以后人称其为自然数．由于双手有 10 个指头，所以古中国和古印度等国发明了十进制计数法．南美洲气候炎热，那里古代人类打赤脚，所以玛雅文明中有二十进制．自然数的概念究竟是何年何地的人们首先创立的，是不可考究的事了．

公元前 5 世纪左右，中国发明了数字(从一到九，如图 1)：

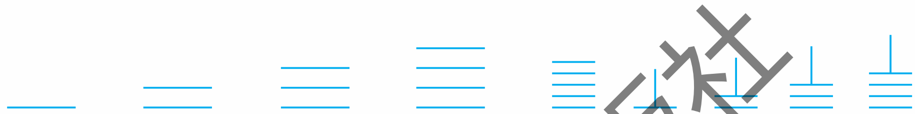


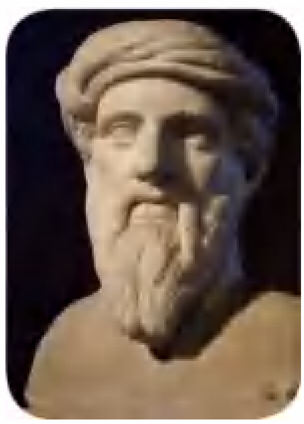
图 1

自然数是数学的祖先．19 世纪，德国数学家克罗内克(1823—1891)说：“上帝创造了自然数，其余(数学)都是人造的．”

公元元年左右，中国的《九章算术》中由除法与减法引入了分数和负数．

古印度人首先把零当成数看待，且创造了数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9．公元 9 世纪阿拉伯数学家花剌子米(约 783—约 850)把这 10 个数字引入欧洲．由于花氏是阿拉伯人，欧洲人误称 0，1，…，9 为阿拉伯数字，其实应正名为印度数字．

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派的希帕索斯(公元前 5 世纪下半叶)提出：单位正方形的对角线有多长？当时毕达哥拉斯学派的信条是“万物皆数”，他们认为数就是正分数和正整数，此外不存在别的什么数．但由勾股定理，单位正方形的对角线长 l 应满足 $l^2=2$，若 $l=\frac{q}{p}$ 是既约分数，则会引出矛盾．为了维护毕达哥拉斯的观点，希帕索斯被学派门徒投入爱琴海．但问题并没有得到解决，对角线是物，它的长就应该是数．由于这个数不是毕达哥拉斯时代的人们所知道的数，于是出现了第一次数学危机．从那之后人们发现了一种不是自然数与分数的数，名曰“无理数”．但直到 19 世纪，数学家们才搞清楚什么是无理数，进而得到实数的概念．



毕达哥拉斯

1545 年，意大利著名数学家卡尔达诺(1501—1576)用三次方程 $x^3=px+q(p,q>0)$ 的求根公式 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ 解方程时，遇到负数开平方但又不能把这种数舍去的局面，例如 $x^3=15x+4$，它的一个根 $x_1=4$，而把 $p=15$，$q=4$ 代入公式则得这个根

$$x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

卡尔达诺称诸如 $\sqrt{-121}$ 这种负数开平方的量为“诡辩量”，但这里已经不能再像过去解一元二次方程那样见到 $\Delta=b^2-4ac<0$ 就声称根在实数范围无意义而舍弃. 事实上，如果这时把 x_1 舍弃，舍弃的是实根 4. 所以人们开始接受负数开平方的运算，确认运算结果也是一个数. 1637 年，笛卡儿(1596—1650)称负数开平方的结果是“虚数”.

高斯

1797 年，挪威数学家韦塞尔(1745—1818)对 $a+b\sqrt{-1}$ 作出几何解释，在平面直角坐标系中，若一点 P 的坐标为 (a, b)，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 用复数 $a+b\sqrt{-1}$ 表示. 1801 年，高斯(1777—1855)引入记号 i，将复数 $a+b\sqrt{-1}$ 写成 $a+b\mathrm{i}$.

数系扩充的图谱如图 2 所示：

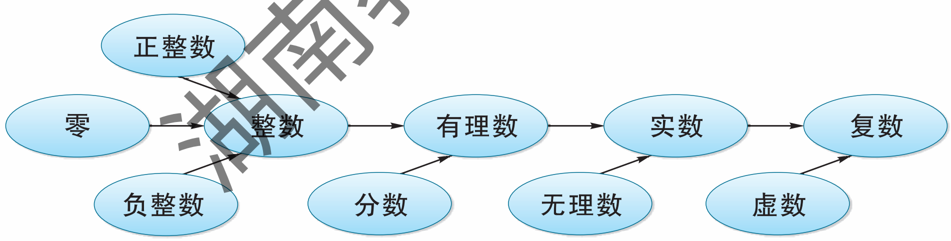
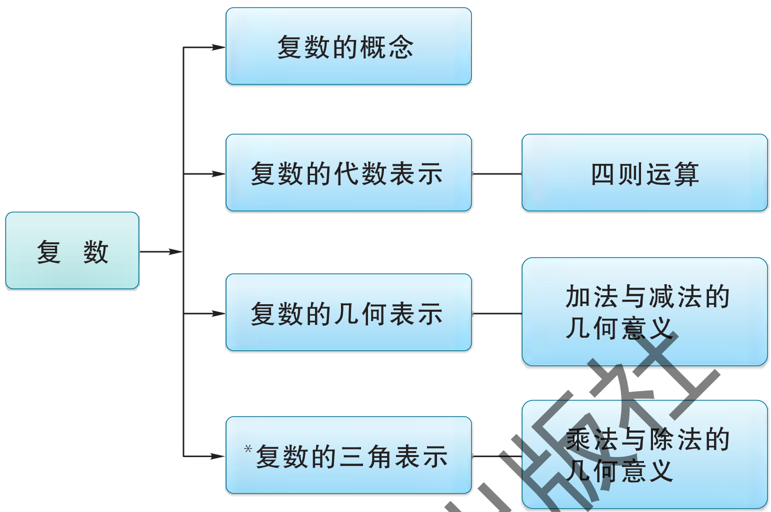


图 2

数系扩充到复数之后，不但形如 $x^n=a$ 的所有方程都有解，而且任何一个复系数一元 n 次方程都至少有一个根，因而恰有 n 个根. 也就是说：每个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 都能够分解为一次因子的乘积 $f(x)=a_0(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_n)$，其中 x_1，…，x_n 就是它的 n 个根(有些根可能重复出现，称为重根). 这个结论叫作代数基本定理. 代数基本定理在代数乃至整个数学中起着基础作用. 这个定理的第一个严格证明通常认为是高斯 1799 年在哥廷根大学的博士论文中给出的. 据说，关于代数基本定理的证明，现有 200 多种证法.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 结合数学史料，谈一谈你对引入虚数的必要性的认识.

2. 复数、实数、虚数、纯虚数之间有何关联?

3. 复数的四则运算与多项式的运算之间有何联系?

4. 复数是数，如何在复平面内表示一个复数? 复数的加、减运算又蕴含着怎样的几何意义?

*5. “虚数”并不虚，试说明 $i^2=-1$ 的几何意义. 如何用三角形式表示一个复数? 复数的三角形式与复数的乘、除运算有怎样的关联? 试说明复数乘、除运算的几何意义.

复习题三

学而时习之

1. 判断下列命题的真假.

(1) 任何复数的模都是非负数；

(2) x 轴是复平面的实轴，y 轴是虚轴；

(3) 若 $z_1=\sqrt{5}\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_3=-\sqrt{5}$，$z_4=2-\mathrm{i}$，则这些复数的对应点共圆；

(4) $|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 0.

2. 若复数 $z=\sin 2\alpha-(1-\cos 2\alpha)\mathrm{i}$ 是纯虚数，$\alpha\in[0,2\pi)$，则 $\alpha=$________.

3. 若复数 $z_1=2-\mathrm{i}$，$z_2=1-3\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\mathrm{i}}{z_1}+\dfrac{z_2}{5}$ 的虚部为________.

4. 计算：

(1) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})$；

(2) $(4-3\mathrm{i})(-5-4\mathrm{i})$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$；

(4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

5. 计算：

(1) $\dfrac{1}{11-5\mathrm{i}}$；

(2) $\dfrac{7-9\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；

(3) $\dfrac{(1-2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{(2+\mathrm{i})^2}{4-3\mathrm{i}}$；

(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

6. 把复数 $1+\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度得到点 A，把所得向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$，得到向量 $\overrightarrow{OB}$，则点 B 对应的复数为____________.

7. 求满足下列各条件的复数 z.

(1) $z\mathrm{i}=\mathrm{i}-1$；

(2) $z^2-z+2=0$.

8. 已知复平面内正方形的三个顶点所对应的复数分别是 $1+2\mathrm{i}$，$-2+\mathrm{i}$，$-1-2\mathrm{i}$，求第四个顶点所对应的复数.

9. 求实数 m 取何值时，复数 $z=(2m^2-3m-2)+(m^2-m)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点 Z：

(1) 位于第二象限；

(2) 位于第一或第三象限；

(3) 在直线 $x-y-1=0$ 上.

* **10.** 下列复数是不是三角形式？如果不是，把它们表示成三角形式.

(1) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(2) $-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；

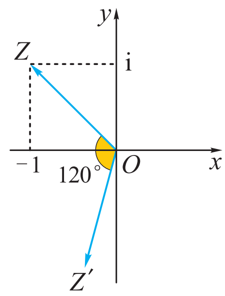
(3) $\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$；

(4) $\cos\dfrac{7\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{5}$.

*11. 计算：

（1）$8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

（2）$\sqrt{2}(\cos 240^\circ - i\sin 240^\circ)\div\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.



（第 12 题）

12. 如图，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与复数 $-1+i$ 对应，把 $\overrightarrow{OZ}$ 按逆时针方向旋转 120°，得到 $\overrightarrow{OZ'}$. 求向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数（用代数形式表示）.

温故而知新

13. 求满足条件 $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$ 且 $|z-2|=2$ 的复数 z.

14. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=\sqrt{3}$，$|z_2|=\sqrt{2}$，$|z_1+z_2|=2\sqrt{2}$，求 $|z_1-z_2|$.

15. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$|z_1+z_2|=4$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

（提示：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$ 是 z_1，z_2 所表示的向量的夹角.）

16. 已知 $|z|=2$，求 $|z-i|$ 的最大值.

17. 用两种不同的方法解方程 $z^2=i$.

*18. 复数 $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ 经过 n 次乘方后，所得的幂等于它的共轭复数，求 n 的值.

上下而求索

19. （数学探究活动）由方程 $z^3=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 得 $z^3-1=0$ 的三个根为 $\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}(0\leqslant k\leqslant 2,\ k\in\mathbf{Z})$，则

$$z^3-1=(z-1)(z-\omega_1)(z-\omega_1^2).$$

将上式右边的各个一次因子适当分组相乘，则可变成有理系数多项式，就得到了 z^3-1 的有理分解式.

请你仿此将 $z^{15}-1$ 进行有理分解.

4

第4章

立体几何初步

我们生活在空间与图形的世界.

立体几何是研究现实世界中空间物体的形状、大小与位置关系的数学分支. 本章我们将从实物模型、空间几何体的整体观察入手，用数学的眼光去刻画这些空间图形的形状、大小，探寻构成这些几何体的基本元素之间具有怎样的位置关系，学会用数学语言来表述有关平行、垂直的性质与判定，并通过推理发现、论证一些几何性质，这对于我们更好地认识、理解现实空间将产生积极的意义.

4.1 空间的几何体

我们生活的三维空间有着绚丽多彩的几何图形．图 4.1－1① 呈现了许多让人赏心悦目的立体建筑．如何从数学的角度来描述它们的形状呢？

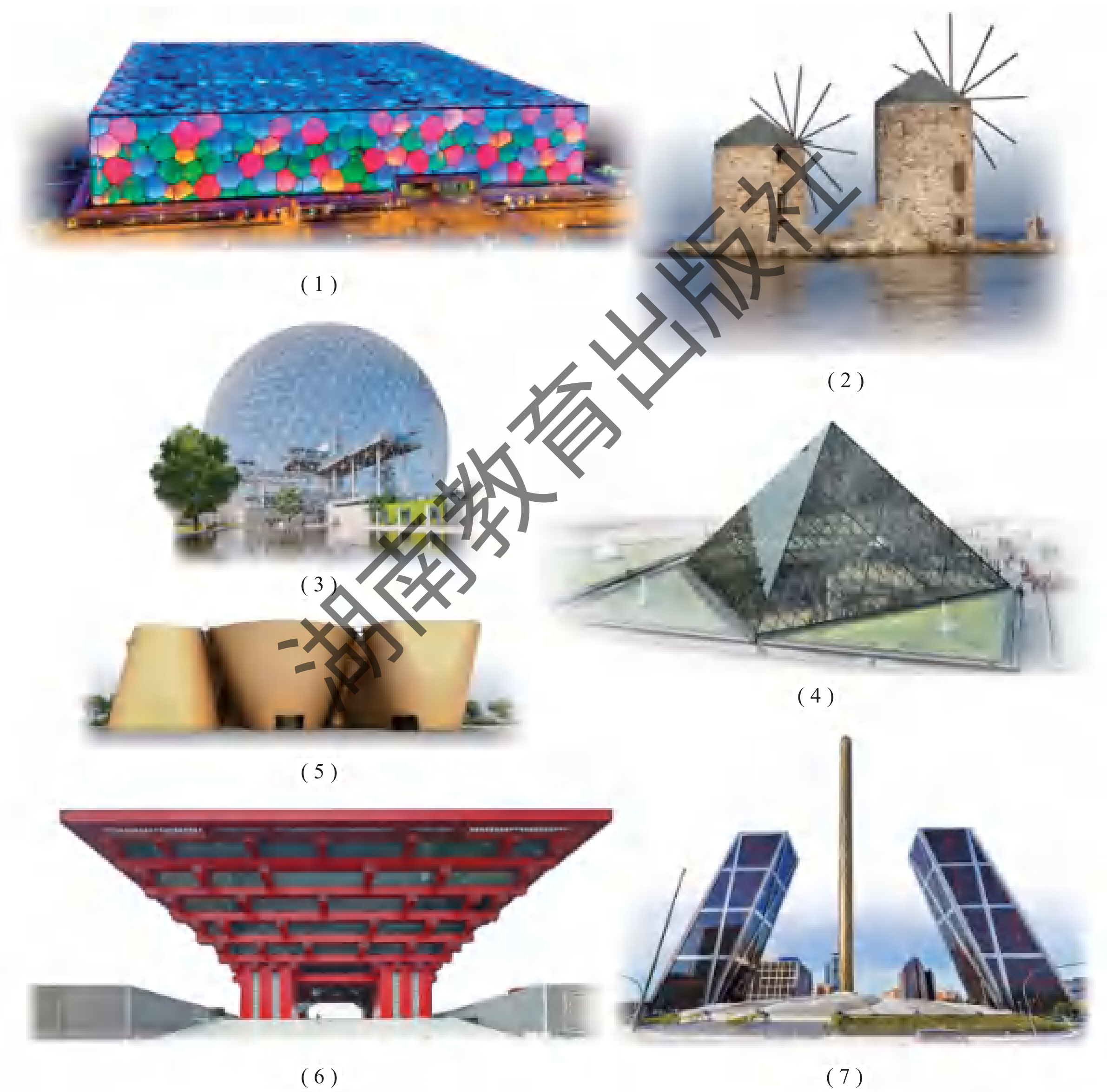


图 4.1－1

① 图中建筑依次为：(1)中国水立方(国家游泳馆)；(2)希腊奇奥斯岛传统风车；(3)加拿大蒙特利尔环境博物馆球形穹顶；(4)法国巴黎罗浮宫博物馆玻璃金字塔；(5)上海世博会场馆之一；(6)上海世博会中国馆；(7)西班牙马德里欧洲之门．

4.1.1 几类简单几何体

对于图 4.1－1 中呈现的物体，如果我们只考虑它们的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形称为**空间几何体**. 例如，图 4.1－2 就是从现实物体中抽象出来的空间几何体（看不到的线一般用虚线表示）.

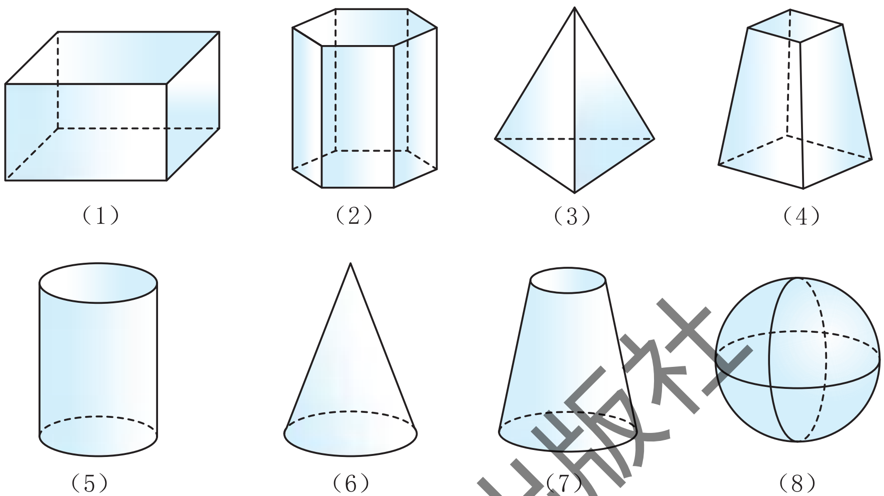


图 4.1－2

观察图 4.1－2(1)～(4)，可以发现这四个几何体都是由多边形围成的.

我们把由若干个平面多边形（包括三角形）所围成的封闭体，叫作**多面体**. 围成多面体的各个多边形叫作**多面体的面**，两个面的公共边叫作**多面体的棱**，棱和棱的交点叫作**多面体的顶点**.

> 本书所说的多边形包括它的内部. 多面体有几个面就称为几面体.

观察图 4.1－2(5)～(8)，你会发现这些几何体都不是完全由平面图形围成，但它们都可看作是由一个平面图形绕某一直线旋转而成的，即它们可依次看作是由一个矩形、直角三角形、直角梯形、半圆绕一直线旋转而成的，如图 4.1－3.

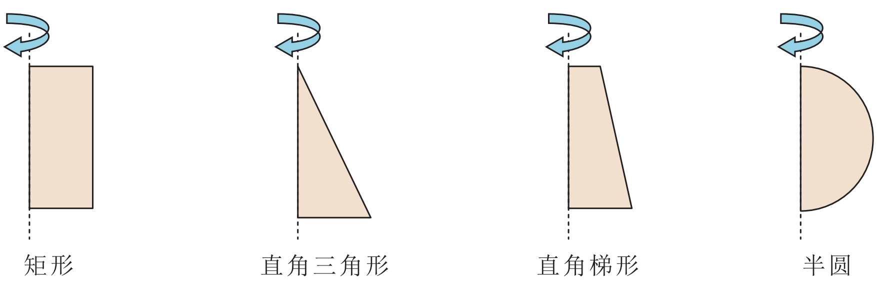


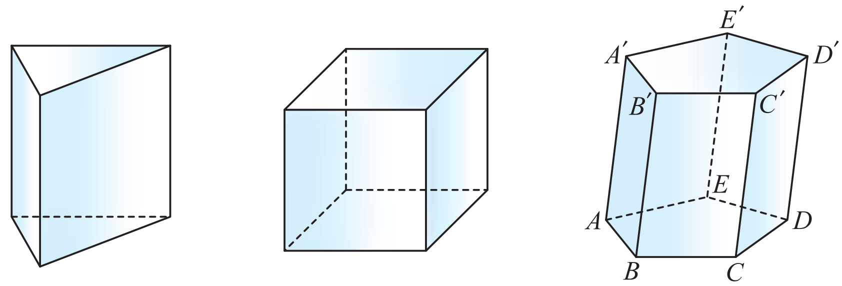
图 4.1－3

我们把平面上一条封闭曲线内的区域绕着该平面内的一条定直线旋转而成的几何体称为**旋转体**. 这条定直线称为**旋转轴**.

下面我们针对这几类简单几何体的特征逐一展开研究.

一　棱柱

观察图 4.1－4 中的多面体，想一想：这些多面体各有什么特点？它们分别由什么样的多边形围成？各个面之间的位置关系有什么特点？各条棱之间呢？



（1）　　　（2）　　　（3）

图 4.1－4

直观上可以发现，图 4.1－4 中的每个多面体的上、下两面都是边数相同的全等多边形，且上、下两个面所在平面都不会相交，其余各面都是平行四边形.

我们把不会相交的两个平面称为互相平行的平面.

一般地，有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形，且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面围成的几何体叫作**棱柱**.

两个互相平行的面叫作**棱柱的底面**，其余各面（都是平行四边形）叫作**棱柱的侧面**.

相邻两个侧面的公共边叫作**棱柱的侧棱**.

侧棱与底面的公共顶点叫作**棱柱的顶点**.

棱柱用表示底面各顶点的字母来表示，如图4.1－4(3)中的棱柱可表示为棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$.

棱柱的底面可能是三角形、四边形、五边形等，这样的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

具有某些特殊性质的棱柱还有专门的名称，例如：

侧面都是矩形的棱柱称为**直棱柱**，如图 4.1－4(1).

底面是正多边形的直棱柱称为**正棱柱**，如图 4.1－4(2).

如果棱柱的底面和侧面都是矩形，这样的棱柱就是我们熟悉的**长方体**，而所有棱长都相等的长方体就是**正方体**.

实质上，棱柱也可以看作是由一个平面多边形沿某一方向平移所形成的空间几何体，如图 4.1－5.

两个底面是平行四边形的棱柱称为平行六面体.

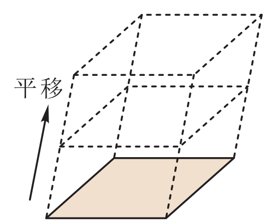


图 4.1－5

二 棱锥

观察图 4.1－6 中的几何体，它们有什么共同特点？

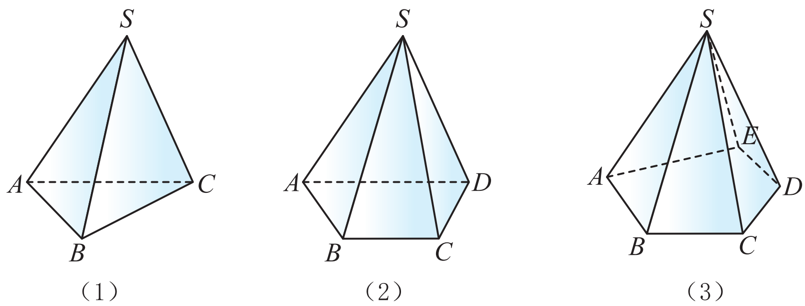


图 4.1－6

直观上可以发现它们有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，像这样的几何体叫作**棱锥**.

具有同一个公共顶点的三角形面叫作**棱锥的侧面**，这个公共顶点称为**棱锥的顶点**. 相邻两个侧面的公共边叫作**棱锥的侧棱**. 除了侧面外，剩下的那一个多边形面叫作**棱锥的底面**.

棱锥可用表示它的顶点和底面各顶点的字母来表示，如图4.1－6(3)中的棱锥可表示为棱锥 $S-ABCDE$.

棱锥的底面可能是三角形、四边形、五边形等，这样的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥等.

如果棱锥的底面是正多边形，将底面水平放置后，它的顶点又在过正多边形中心的铅垂线上，则这样的棱锥称为**正棱锥**，如图 4.1－7. 顶点 S 到底面中心 O 的距离 SO 叫作正棱锥的高.

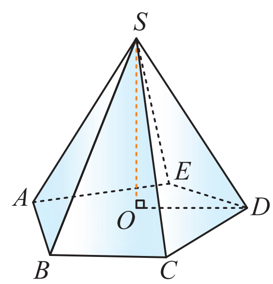


图 4.1－7

三 棱台

观察图 4.1－2(4)或图 4.1－8，你能发现这样的几何体与锥体有何关系吗？

如图 4.1－8，过棱锥任一侧棱上不与侧棱端点重合的一点，作一个与底面平行的平面去截棱锥，截面和原棱锥底面之间的这部分几何体叫作**棱台**.

截面和原棱锥底面分别叫作**棱台的上底面**和**下底面**，其余各面叫作**棱台的侧面**. 棱台的侧面都是梯形. 相邻侧面的公共边叫作**棱台的侧棱**.

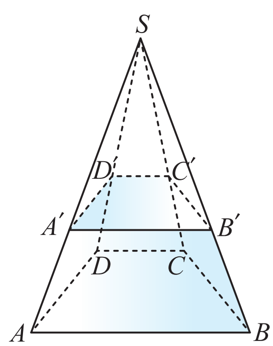


图 4.1－8

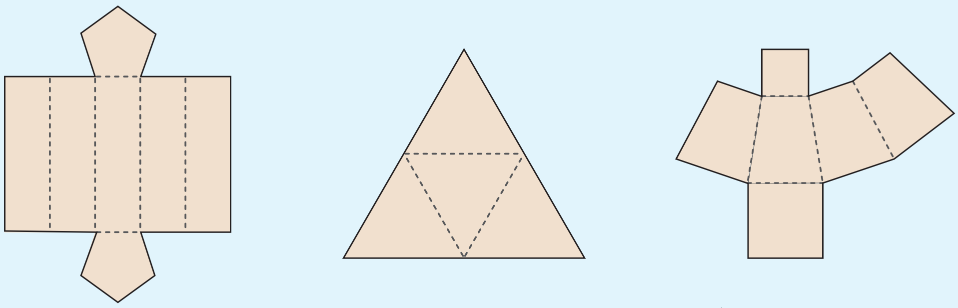
棱台用上、下底面多边形各顶点的字母来表示，如图 4.1－8 中的棱台可表示为棱台 $A'B'C'D'-ABCD$.

由三棱锥、四棱锥、五棱锥等所截得的棱台，分别称为三棱台、四棱台、五棱台等.

由正棱锥截得的棱台称为**正棱台**.

练习

1. 参照下面的示意图，分别用硬卡纸制作正五棱柱、正四面体和正四棱台.



（第 1 题）

2. 收集一些棱柱形、棱锥形、棱台形的包装盒，将包装盒去掉底面，沿任一条侧棱剪开，然后放在平面上展平，它们分别是什么样的平面图形？

3. 如果一个几何体由 7 个面围成，其中 2 个面是互相平行且全等的五边形，其他面都是全等的矩形，那么这个几何体是什么？这个几何体可看作是由哪个平面怎样平移得到的？

4. 棱柱、棱锥、棱台都是多面体，它们在结构上有哪些相同点和不同点？三者之间的关系如何？当底面发生变化时，它们能否相互转化？

前面我们研究了几类简单多面体，下面来研究几类常见旋转体.

四 圆柱

如图 4.1－9，将矩形 $ABCD$(及其内部)绕其一条边 AB 所在直线旋转一周，所形成的几何体叫作**圆柱**，边 AB 所在直线叫作**圆柱的轴**，由边 AD 和 BC 绕轴旋转而成的圆面叫作**圆柱的底面**，由边 CD 绕轴旋转而成的曲面叫作**圆柱的侧面**，边 CD 叫作**圆柱的一条母线**.

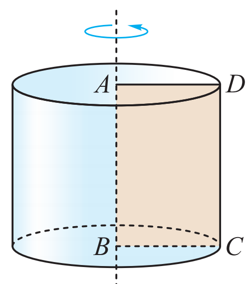


图 4.1－9

根据圆柱的形成过程可知，圆柱有无穷多条母线，且所有母线都与轴平行；圆柱有两个相互平行的底面.

圆柱可以用表示它的轴的字母来表示，如图 4.1－9 中的圆柱记作圆柱 AB. 圆柱与棱柱统称为柱体.

五 圆锥

如图 4.1－10，将直角三角形 ABC(及其内部)绕其一条直角边 AB 所在直线旋转一周，所形成的几何体叫作**圆锥**.

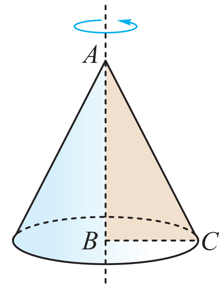


图 4.1－10

直角边 AB 所在直线叫作**圆锥的轴**，点 A 叫作**圆锥的顶点**，由直角边 BC 绕轴旋转而成的圆面叫作**圆锥的底面**，由斜边 AC 绕轴旋转而成的曲面叫作**圆锥的侧面**，斜边 AC 叫作**圆锥的一条母线**.

圆锥有无穷多条母线，且所有母线相交于圆锥的顶点.

圆锥也用表示它的轴的字母来表示，如图 4.1－10 中的圆锥记作圆锥 AB. 圆锥与棱锥统称为锥体.

六 圆台

类似地，将直角梯形 $ABCD$(及其内部)绕其垂直于底边的腰 BC 所在直线旋转一周，所形成的几何体叫作**圆台**，如图 4.1－11.

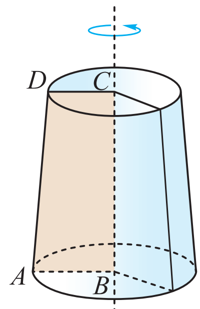


图 4.1－11

腰 BC 所在直线叫作**圆台的轴**，由底边 AB 和 CD 绕轴旋转而成的圆面叫作**圆台的底面**，由腰 AD 绕轴旋转而成的曲面叫作**圆台的侧面**，腰 AD 叫作**圆台的一条母线**.

图 4.1－11 中的圆台记作圆台 BC. 圆台与棱台统称为台体.

圆台也可看作是用平行于圆锥底面的平面去截圆锥而得到的圆锥底面与截面之间的几何体.

综上可知，圆柱、圆锥、圆台有以下性质：

(1) 平行于圆柱、圆锥、圆台的底面的截面都是圆；

(2) 圆柱、圆锥、圆台的轴截面分别是全等的矩形、等腰三角形、等腰梯形.

七 球

如图 4.1－12，将圆心为 O 的半圆(及其内部)绕其直径 AB 所在直线旋转一周，所形成的几何体叫作**球**，记作球 O. 半圆的圆弧旋转一周所形成的曲面叫作**球面**(即球的表面)，把点 O 称为**球心**，把原半圆的半径和直径分别称为**球的半径**和**球的直径**.

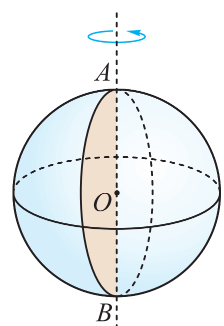


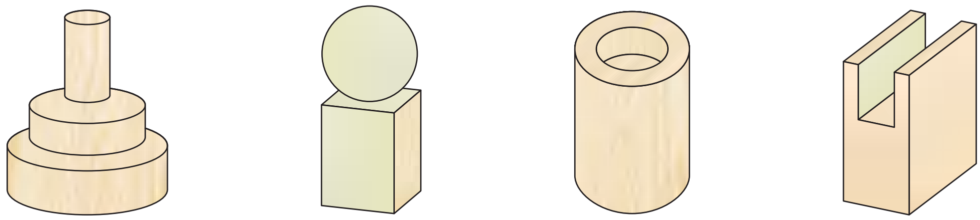
图 4.1－12

球具有以下性质：

(1) 球面上所有的点到球心的距离都相等，等于球的半径；

(2) 用任何一个平面去截球面，得到的截面都是圆，其中过球心的平面截球面得到的圆的半径最大，等于球的半径.

现实世界中，还有许多物体表示的几何体是由柱体、锥体、台体、球等简单几何体组合而成，这些几何体称为简单组合体，如图 4.1－13.



（1）　　（2）　　（3）　　（4）

图 4.1－13

简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成，如图 4.1－13(1)(2)；一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成，如图 4.1－13(3)(4).

例 1　如图 4.1－14，将直角梯形 $ABCD$ 绕边 AB 所在直线旋转一周，形成的几何体是由哪些简单几何体组成的?

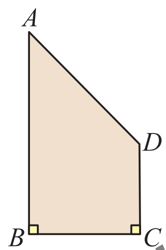


图 4.1－14

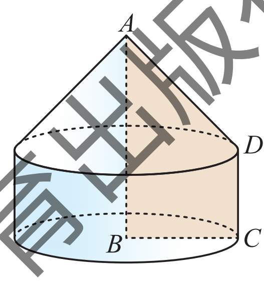


图 4.1－15

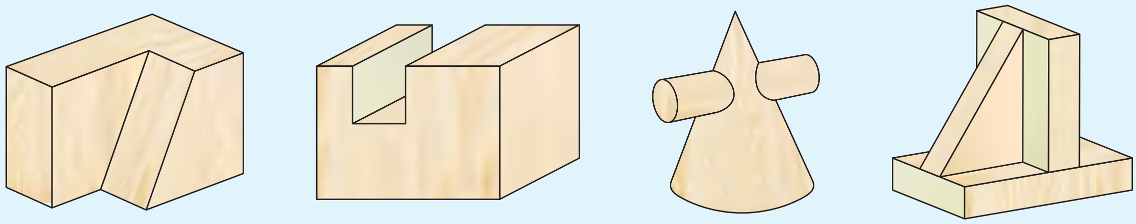
解　将图 4.1－14 中的直角梯形 $ABCD$ 绕边 AB 所在直线旋转一周后，得到的几何体如图 4.1－15 所示，这个几何体是由圆柱和圆锥这两个简单几何体组成的.

练习

1. 任做一个圆柱、圆锥、圆台，去掉其底面后，沿任意一条母线剪开，然后放在平面上展平，它们分别是什么样的平面图形?

2. 圆柱、圆锥、圆台都是旋转体，它们在结构上有哪些相同点和不同点？当底面发生变化时，它们能否相互转化？如能，如何转化?

3. 指出下图中的几何体分别由哪些简单几何体组成.



（第 3 题）

4.1.2 空间几何体的直观图

学习空间几何体，除了要会辨认它们，还需要作图来表示这些几何体，以便进一步提高对空间几何体结构特征的认识．同时，比较准确地画出几何图形，是学好立体几何的一个前提．

我们常用三视图和直观图来表示空间几何体．在初中就已知道，三视图是观察者从三个不同位置来观察同一个空间几何体而画出的图形．而直观图是观察者站在某一点观察一个空间几何体而获得的图形．例如，前面图 4.1－2 中的图形都是相应几何体的直观图．它们与空间几何体的真实形状不完全相同．

空间几何体的直观图通常是在平行投影下得到的平面图形．下面我们以正六边形为例来说明水平放置的平面图形的直观图画法．

例 2 画水平放置的正六边形的直观图．

画法 （1）如图 4.1－16(1)，在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在的直线为 x 轴，取与 AD 垂直的对称轴 GH 为 y 轴，x 轴与 y 轴相交于点 O．任取点 O'，画出对应的 x'轴，y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$．

（2）以点 O'为中点，在 x'轴上取 $A'D'=AD$，在 y'轴上取$G'H'=\frac{1}{2}GH$；以点 H'为中点画 $F'E' /\!/ x'$轴，并使 $F'E'=FE$；再以 G'为中点画 $B'C' /\!/ x'$轴，并使 $B'C'=BC$．

（3）顺次连接 A'，B'，C'，D'，E'，F'，A'，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图，如图 4.1－16(2)．

你能总结水平放置的平面图形的直观图的画法吗？

（4）擦去辅助线，整理得图 4.1－16(3)．

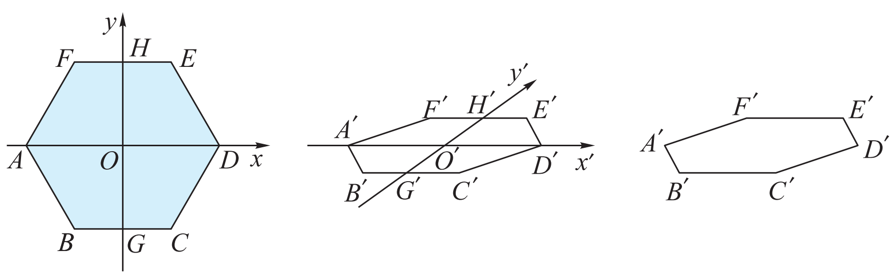


图 4.1－16

画圆的直观图比较复杂，生活经验告诉我们，水平放置的圆看起来像椭圆，如图 4.1－17，因而在画圆的直观图时，人们常常借助椭圆模板(图 4.1－18)来画．

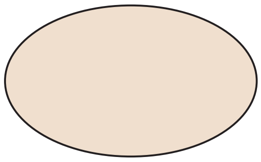


图 4.1－17

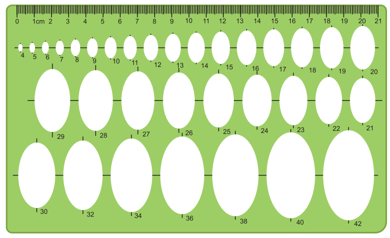


图 4.1－18

学会画水平放置的平面图形的直观图后，还需继续探讨空间几何体直观图的画法.

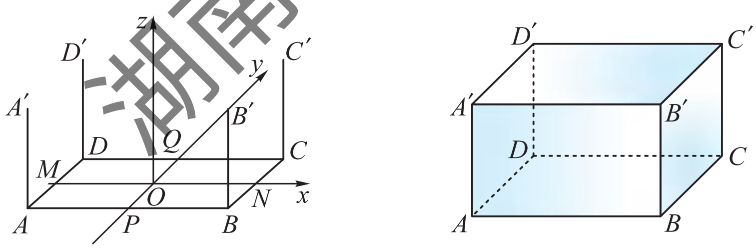
例 3 画长、宽、高分别为 4 cm，3 cm，2 cm 的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的直观图.

画法 （1）画轴. 如图 4.1－19(1)，画 x 轴，y 轴，z 轴，三轴相交于点 O，使 $\angle xOy=45^\circ$，$\angle xOz=90^\circ$.

（2）画底面. 以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN，使 $MN=4$ cm；在 y 轴上取线段 PQ，使 $PQ=\dfrac{3}{2}$ cm. 分别过点 M 和 N 作 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线，设它们的交点分别为 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$.

（3）画侧棱. 过 A，B，C，D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 2 cm 长的线段 AA'，BB'，CC'，DD'.

（4）成图. 顺次连接 A'，B'，C'，D'，A'，并加以整理(去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线)，就得到长方体的直观图(如图 4.1－19(2)).



（1）　　　　（2）

图 4.1－19

上面这种常用的画直观图的方法叫作**斜二测画法**. 这种画法的规则是：

（1）在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox，Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$，且 $\angle yOz=90^\circ$.

（2）画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°），$\angle x'O'z'=90^\circ$，$x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面.

（3）已知图形中平行于 x 轴，y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴，y' 轴或 z' 轴的线段.

（4）已知图形中平行于 x 轴或 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变，平行于

y 轴的线段，长度取原来的一半.

例 4 在初中，我们已经学习了一些空间几何体的三视图(正视图、侧视图、俯视图). 图 4.1－20 是某几何体的三视图(尺寸单位：cm)，试画出它的直观图.

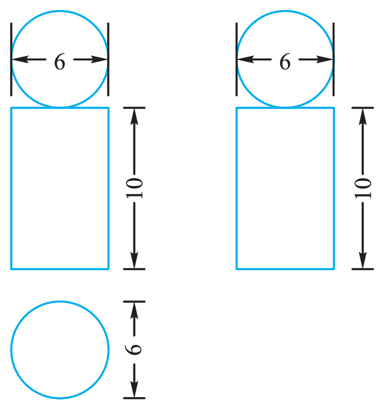


图 4.1－20

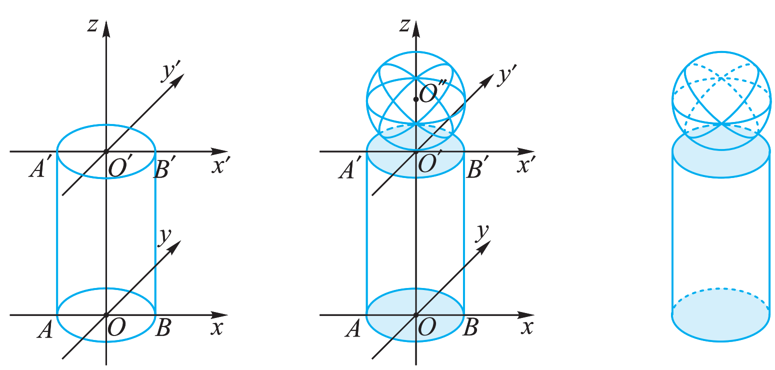
分析 由几何体的三视图可知，这个几何体是一个简单组合体. 它的下部是一个圆柱，上部是一个球，且圆柱横截面的直径与球的直径相同. 我们可以先画出下部的圆柱，再画出上部的球.

画法 (1) 画轴. 画 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴，使$\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$.

(2) 画圆柱的直观图. 如图 4.1－21(1)，以点 O 为中点，在 x 轴上截取 $AB=6$ cm，借助椭圆模板画出下底面$\odot O$的直观图. 在 z 轴上截取 $OO'=10$ cm，过点 O' 分别作 $O'x'\,/\!/\,Ox$，$O'y'\,/\!/\,Oy$. 以点 O' 为中点，在 x'轴上截取 $A'B'=6$ cm，借助椭圆模板画出上底面$\odot O'$的直观图. 连接 AA' 与 BB'.

(3) 画球的直观图. 如图 4.1－21(2)，在 $O'z$ 轴上截取 $O'O''=3$ cm，以点 O''为中心，分别沿三个方向(两两之间的夹角为 120°)画半径为 3 cm 的圆的直观图(三个椭圆). 以点 O''为圆心画一个半径为 3 cm 的圆.

(4) 成图. 经过整理，就得到了所求几何体的直观图，如图 4.1－21(3).



(1) (2) (3)

图 4.1－21

动手画出空间几何图形的直观图，既要有推理的素养，又要有空间想象力. 本节提供了不少机会让你画图，一定要试一试.

练 习

1. 用斜二测画法画出下列水平放置的平面图形的直观图：

（1）边长为 3 cm 的正三角形；

（2）边长为 4 cm 的正方形；

（3）边长为 2 cm 的正八边形.

2. 画出下列图形的直观图：

（1）棱长为 4 cm 的正方体；

（2）底面半径为 2 cm，高为 4 cm 的圆锥.

多知道一点

正等测画法

圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆. 圆的直观图，一般不用斜二测画法，而用正等测画法. 它的规则是：

（1）如图 1，取互相垂直的直线 Ox，Oy 作为已知图形⊙O 所在平面直角坐标系的 x 轴，y 轴. 画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=120°$（或 $60°$），$O'x'$，$O'y'$ 确定的平面表示水平平面，如图 2.

（2）已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中，分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段，且保持长度不变，如图 2.

这样得到的圆的直观图是椭圆，如图 3.

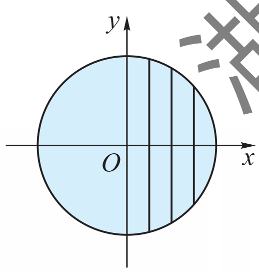


图 1

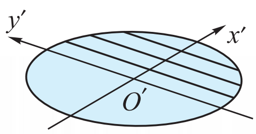


图 2

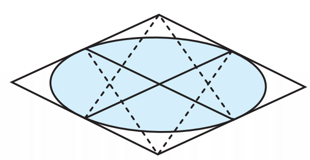


图 3

习题 4.1

学而时习之

1. 判断下列命题的真假.

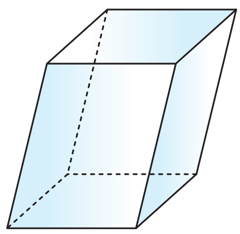
(1) 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体是棱柱.

(2) 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体是棱柱.

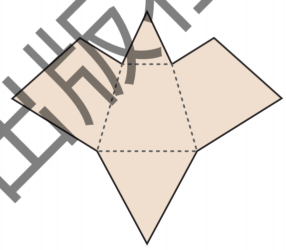
(3) 用一个平面去截棱锥，底面与截面之间的部分组成的几何体是棱台.

(4) 圆锥截去一个小圆锥后剩余部分是圆台.

2. 如图，四棱柱的六个面都是平行四边形，这个四棱柱可以由哪个平面图形按怎样的方向平移得到？



（第 2 题）

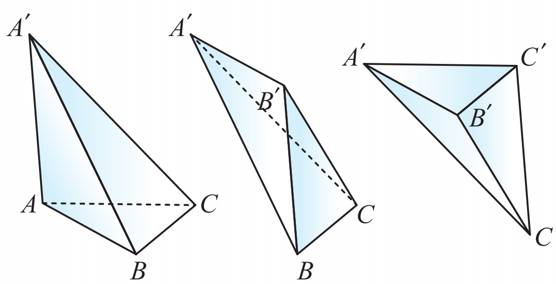


（第 3 题）

3. 在一张硬卡纸上，将图中给出的图形放大，然后按实线剪纸，再按虚线折痕折起并黏合，说出得到的几何体的名称.

4. 有一个侧面是矩形的棱柱是不是直棱柱？有两个相邻的侧面是矩形的棱柱呢？

5. 如图，有三个三棱锥 $A'-ABC$，$B'-A'BC$，$C'-A'B'C$，你能将它们组合成一个三棱柱吗？试一试.

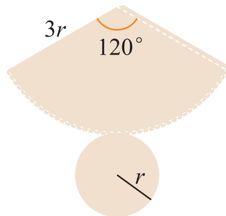


（第 5 题）

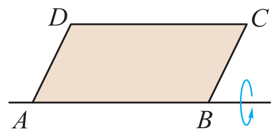
6. (1) 剪纸制作底面半径为 3 cm，高为 6 cm 的圆柱和圆锥.

(2) 剪纸制作两底面半径分别为 3 cm，6 cm，高为 4 cm 的圆台.

7. 如图，用硬卡纸按图样画好并剪下，再沿图中虚线折起来粘好，得到了什么几何体？



（第 7 题）



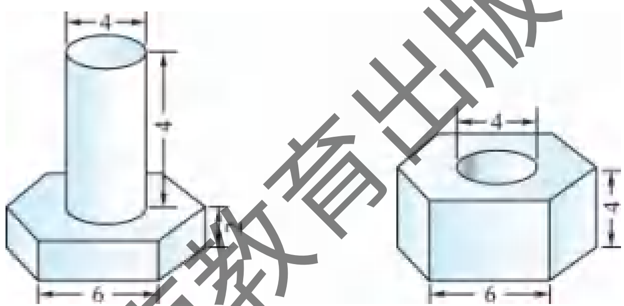
（第 8 题）

8. 如图，将▱$ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周，形成的几何体是由哪些简单几何体构成的？

9. 梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB=4$ cm，$CD=2$ cm，$\angle DAB=30^{\circ}$，$AD=3$ cm，试画出它的直观图.

10. 画一个三棱柱和一个四棱锥的直观图.

11. 画出图中简单组合体的直观图(尺寸单位：cm).

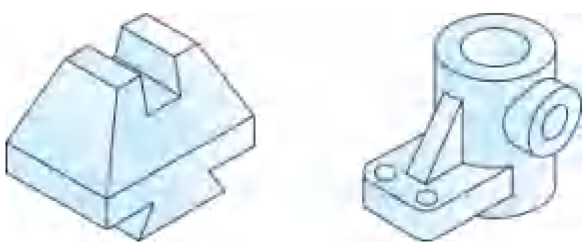


（第 11 题）

温故而知新

12. 收集世界著名建筑或本地典型建筑图片(或者实地考察)，讨论它们的几何结构特征，并画出它们的直观图.

13. 指出下图中的几何体是由哪些简单几何体组成的.



（第 13 题）

14. n($n\in\mathbf{N}$，$n>3$)棱柱是否可分割成若干个三棱锥？若能分割，如何分割？

4.2 平　面

几何中的点、直线都是抽象的概念，并没有大小粗细之分，基于这种抽象的思考，我们在初中就已学过平面图形中点与直线的一些几何特征及性质，如“两点之间线段最短”“两点确定一条直线”等.

要了解立体图形的几何特征及性质，面是一个非常关键的元素. 平面有哪些特征及性质？

黑板面、桌面、平静的湖面等都给我们以“平面”的形象. 几何中所说的**平面**，就是从这些物体中抽象出来的. 但是，几何里的平面没有厚度，向四周无限延展，也就是说，平面是没有大小限制的.

我们通常用一个平行四边形来代表平面，但仍然需要把它想象成是无限延展的.

平面常用小写希腊字母 α，β，γ，…来表示，把它写在表示平面的平行四边形的一个角上；还可以用表示平面的平行四边形的顶点字母或对角顶点字母来表示.

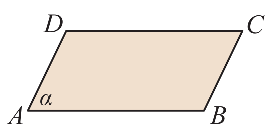


图 4.2－1

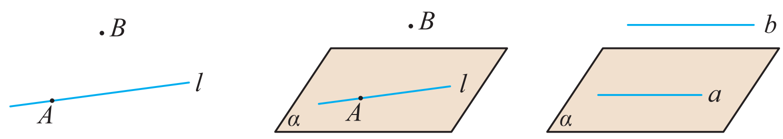
如图 4.2－1 中的平面可记为平面 α，也可以记为平面 $ABCD$或平面 AC.

点动成线，线动成面. 空间中的直线和平面都可以看作点的集合，因此可以借用集合中的符号来表示空间中点、直线、平面之间的位置关系.

如图 4.2－2(1)，点 A 在直线 l 上，记作 $A\in l$；点 B 不在直线 l 上，记作 $B\notin l$.

如图 4.2－2(2)，点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 不在平面 α 内，记作 $B\notin\alpha$.

如图 4.2－2(3)，直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$；直线 b 不在平面 α 内，记作 $b\not\subset\alpha$.



（1）　　（2）　　（3）

图 4.2－2

而直线与直线相交，或直线与平面相交，以及平面与平面相交，我们都用“$\cap$”表示它们的公共部分.

如图 4.2－3，直线 a，b 相交于点 P，记作 $a \cap b = P$.

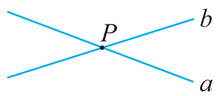


图 4.2－3

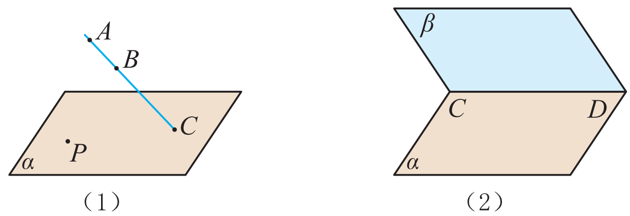


图 4.2－4

如图 4.2－4(1)，直线 AB 和平面 α 交于点 C，记作 $AB \cap \alpha = C$；

如图 4.2－4(2)，平面 α 与平面 β 交于直线 CD，记作 $\alpha \cap \beta = CD$.

下面我们来学习有关平面的几条重要事实.

观察图 4.2－5 中的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的各条棱和各个面的相互关系：

点 A，B 在平面 $ABCD$ 内，而整条直线 AB 都在平面 $ABCD$ 内；点 A，B 在平面 $ABB'A'$ 内，而整条直线 AB 都在平面 $ABB'A'$ 内.

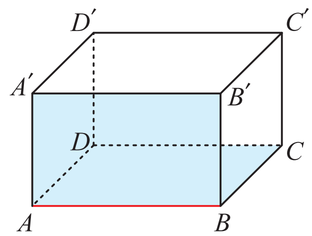


图 4.2－5

一般地，有以下基本事实：

> 如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内.

用符号语言描述上述基本事实，即为

$$若\ A \in \alpha，B \in \alpha，则\ AB \subset \alpha.$$

我们检查桌面是否平整时，往往要将一把直尺置于桌面的各个方向上，通过检查是否漏光来判断桌面是否平整，这就是上述基本事实的应用.

观察图 4.2－5 所示的长方体模型，同时过 A，B，C 三点的平面有哪几个？同时过 A，B，B' 三点的平面有哪几个？

可以发现：同时过 A，B，C 三点的平面只有平面 $ABCD$ 一个，同时过 A，B，B' 三点的平面也只有平面 $ABB'A'$ 一个.

一般地，有以下基本事实：

> 过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.

这个事实在日常生活中有广泛的应用，比如照相机的三脚架就应用了这个原理.

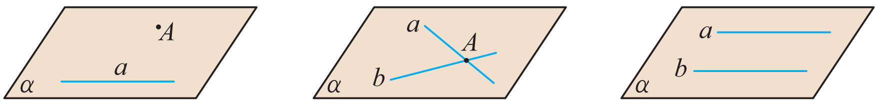
上述基本事实我们可以简单地说成“不共线三点确定一个平面”，再结合初中所学的“两点确定一条直线”，就可以得到如下三条推论：

（1）**一条直线和直线外一点确定一个平面**（如图 4.2－6(1)）.

（2）**两条相交直线确定一个平面**（如图 4.2－6(2)）.

（3）**两条平行直线确定一个平面**（如图 4.2－6(3)）.

“确定一个平面”是指“有且只有一个平面”.



(1)　　(2)　　(3)

图 4.2－6

注意　在立体几何里，平面几何中的定义、基本事实（公理）、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立.

例　两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内.

已知：如图 4.2－7，直线 AB，BC，CA 两两相交，交点分别为 A，B，C.

求证：直线 AB，BC，CA 共面[①].

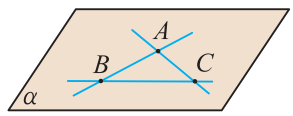


图 4.2－7

证明　因为直线 AB 和 AC 相交于点 A，

所以直线 AB 和 AC 可确定一个平面，记为 α.

因为 $B\in AB$，$C\in AC$，

所以 $B\in\alpha$，$C\in\alpha$.

所以 $BC\subset\alpha$.

因此，直线 AB，BC，CA 都在平面 α 内，即它们共面.

本例中为什么要限定“不过同一个点”？

观察图 4.2－8 中的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，可以发现：

平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 相交于 BC，即两个平面相交成直线；

另一方面，相邻两个平面有一个公共点，如平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 有一个公共点 B，经过点 B 有且仅有一条公共直线 BC.

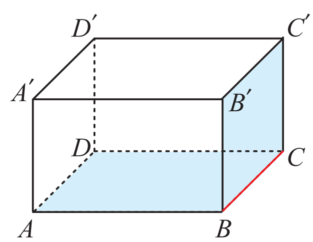


图 4.2－8

① 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”.

一般地，有以下基本事实：

如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

为了简便，如不特别说明，以后说到两个平面，都是指两个不重合的平面.

用符号语言描述上述基本事实，即为

若 $P\in\alpha$，且 $P\in\beta$，则 $\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$.

上述基本事实告诉我们，如果两个不重合的平面 α 和 β 有一个公共点 P，那么这两个平面就一定有一条过点 P 的公共直线，且这样的直线只有一条(如图 4.2－9).

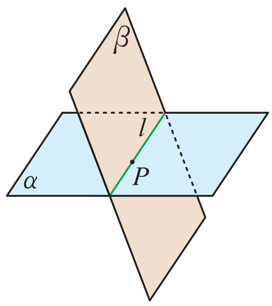


图 4.2－9

画相交平面时，一定要画出交线. 如果一个平面被另一平面遮住，应把被遮住的部分画成虚线.

上述三条基本事实是人们经过长期的观察和实践总结出来的，是几何推理的基本依据，也是我们进一步研究空间图形的基础.

练 习

1. 用集合符号表示下列语句，并画出相应的图形：

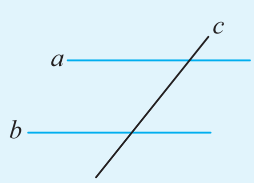
(1) 点 A 在直线 a 上，直线 a 在平面 α 内；

(2) 直线 a 经过平面 α 外的一点 A；

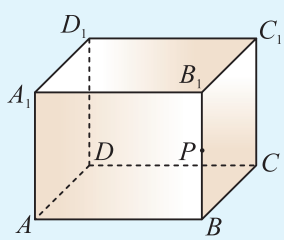
(3) 直线 a 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

2. 已知 a，b，c 是空间三条直线，且 $a/\!/b$，c 与 a，b 都相交.

求证：直线 a，b，c 在同一平面内.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 上一点，画出由 A_1，C_1，P 三点所确定的平面 α 与长方体表面的交线.

习题 4.2

学而时习之

1. 下面的说法正确吗？为什么？

（1）线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内；

（2）平面 α 和平面 β 只有一个公共点.

2. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

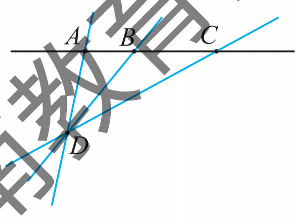
3.（1）不共面的四点可以确定几个平面？

（2）三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？

（3）共点的三条直线可以确定几个平面？

4. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

5. 如图，已知 A，B，C，D 是空间四点，且点 A，B，C 在同一直线 l 上，点 D 不在直线 l 上. 求证：直线 AD，BD，CD 在同一平面内.



（第 5 题）

温故而知新

6. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

7. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一个平面内？

4.3 直线与直线、直线与平面的位置关系

4.3.1 空间中直线与直线的位置关系

我们知道，同一平面内的两条直线有相交和平行两种位置关系，那么空间中两条直线的位置关系有哪些？

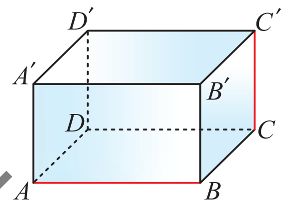


图 4.3-1

如图 4.3-1，观察长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AB 与棱 CC' 所在的直线，可以发现直线 AB 和直线 CC' 既不相交，又不平行，因而它们也不同在任何一个平面内. 我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫作**异面直线**. 图 4.3-1 中的直线 AB 与 CC' 是异面直线. 显然，两条异面直线既不相交，也不平行.

继续观察图 4.3-1，可以发现，直线 AB 与 $A'B'$ 共面且没有公共点，直线 AB 与 AD 共面且只有一个公共点.

由此可知，空间两条直线的位置关系有且只有以下三种：

(1) **相交**——在同一个平面内，两条直线有且只有一个公共点；

(2) **平行**——在同一个平面内，两条直线没有公共点；

(3) **异面**——两条直线不同在任何一个平面内，没有公共点.

一 平行直线

观察图 4.3-1 中长方体各条棱所在直线，思考下列问题：

棱 BB'，CC'，DD' 所在直线与直线 AA' 平行，它们是否两两相互平行？

棱 $A'D'$，$B'C'$，BC 所在直线与直线 AD 平行，它们是否也两两相互平行？

棱 $A'B'$，$D'C'$，DC 所在直线与直线 AB 平行，它们是否也两两相互平行？

答案是肯定的. 于是，有以下基本事实：

平行于同一条直线的两条直线平行.

用符号语言描述上述基本事实，即为

若 a，b，c 为空间中三条不重合的直线，且 $a/\!/b$，$a/\!/c$，则 $b/\!/c$.

例 1 如图 4.3－2，已知 E，F，G，H 分别是空间四边形[①] $ABCD$ 四条边 AB，BC，CD，DA 的中点.

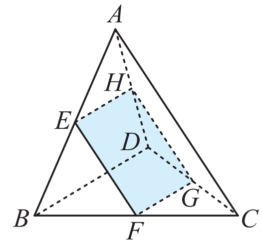


图 4.3－2

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明 连接 AC，BD.

因为 E，F 是$\triangle ABC$ 中 AB，BC 的中点，

所以 $EF /\!/ AC$.

同理可证 $HG /\!/ AC$.

因此 $EF /\!/ HG$.

同理可证 $EH /\!/ FG$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

如图 4.3－3，在一个平面内，如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补. 进一步思考，在空间中如果两个角的两条边对应平行，上述结论是否仍然成立呢?

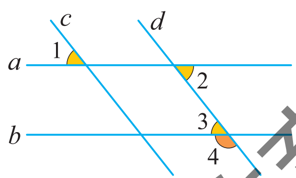


图 4.3－3

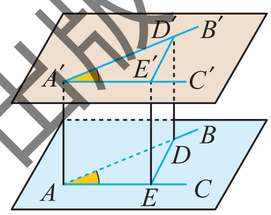


图 4.3－4

如图 4.3－4，已知$\angle BAC$ 和$\angle B'A'C'$是空间中两个角，它们的边 $AB /\!/ A'B'$，$AC /\!/ A'C'$，并且方向相同. 在$\angle BAC$ 和$\angle B'A'C'$的两边上分别截取 $AD=A'D'$，$AE=A'E'$.

连接 AA'，DD'，EE'，ED，$E'D'$.

因为 $AD \underline{/\!/} A'D'$，

所以四边形 $A'D'DA$ 是平行四边形，

因此 $AA' \underline{/\!/} DD'$.

同理可证 $AA' \underline{/\!/} EE'$.

因此 $DD' \underline{/\!/} EE'$，

所以四边形 $DD'E'E$ 是平行四边形，

因此 $ED=E'D'$.

所以$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$，从而$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

于是，如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，并且方向相同，那么这两个角相等.

---

① 四个顶点不共面的四边形叫作空间四边形.

结合图 4.3-5，类似地可以证明：如果空间中两个角的两条边分别对应平行，并且方向相反，那么这两个角相等；如果空间中两个角的两条边分别对应平行，其中一组对应边方向相反，另一组对应边方向相同，那么这两个角互补.

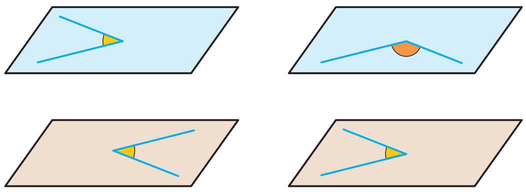


图 4.3-5

综上可得以下定理：

> 学习立体几何时，常类比平面几何，将在平面几何中成立的结论进行推广，得到一些类似结论. 但应注意的是，这些新结论都要经过严格的推理证明.

如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

例 2 如图 4.3-6，三棱锥 $A-BCD$ 中 E，F，G 分别是线段 AB，AC，AD 上的点，且 $EF /\!/ BC$，$FG /\!/ CD$，则 $\triangle EFG$ 和 $\triangle BCD$ 有什么关系？为什么？

解 因为 $EF /\!/ BC$，所以 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$.

因为 $FG /\!/ CD$，所以 $\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{AF}{AC}$，

所以 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AG}{AD}$，

则 $EG /\!/ BD$.

所以 $\angle EFG=\angle BCD$，$\angle GEF=\angle DBC$，

所以 $\triangle EFG \backsim \triangle BCD$.

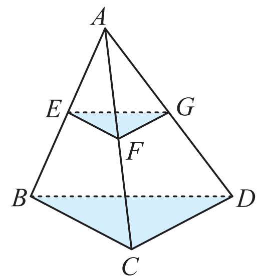
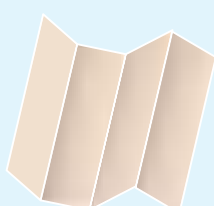


图 4.3-6

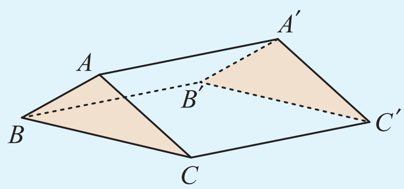
练 习

1. 任意画一个三棱柱，分别找出一些所在直线相交、平行、异面的棱.

2. 如图，把一张矩形的纸对折两次，然后打开，试说明：为什么这些折痕是互相平行的？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA' \underline{/\!/} BB'$，$BB' \underline{/\!/} CC'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

二 异面直线

由异面直线的定义可知，我们不能把两条异面直线置于同一平面内，因而画异面直线时，一般画成图 4.3－7 这样，以显示出它们不共面的特点.

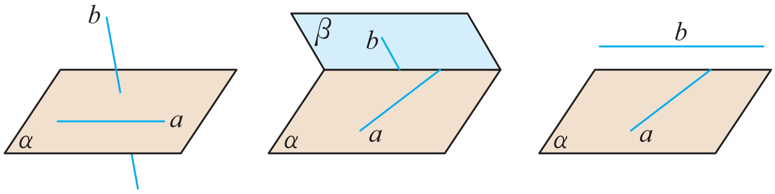


图 4.3－7

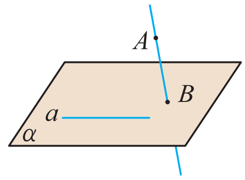


图 4.3－8

例 3 如图 4.3－8，已知 $a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$.

求证：直线 AB 与 a 是异面直线.

证明 假设直线 AB 与 a 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 B 和直线 a.

因为 $B\notin a$，经过点 B 与直线 a 只有一个平面 α，

所以直线 AB 与 a 应在平面 α 内.

所以 $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

所以直线 AB 与 a 是异面直线.

> 这里运用了反证法. 关于反证法参见“多知道一点”.

由此可得判断两条直线为异面直线的一种方法：

与平面相交的直线与该平面内不过该交点的直线是异面直线.

例 4 如图 4.3－9，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱所在的直线中，找出与棱 AA' 所在直线异面的所有直线.

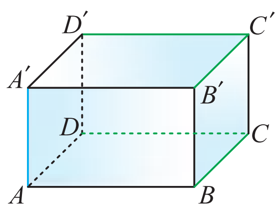


图 4.3－9

解 先把长方体中和棱 AA' 相交或平行的棱去掉，剩下棱 $D'C'$，$B'C'$，DC，BC.

观察棱 BC 所在直线，因为 $AA'\subset$ 平面 AB'，$B\in$ 平面 AB'，$B\notin AA'$，$C\notin$ 平面 AB'，所以直线 AA' 与 BC 是异面直线.

同理，直线 $B'C'$，$D'C'$，DC 都与直线 AA' 异面.

我们知道，平面内两条直线相交形成四个角，其中不大于 90°的角称为它们的夹角. 类似地，对于异面直线 a 和 b，如图 4.3－10，在空间任取一点 P，过 P 分别作 a 和 b 的平行线 a' 和 b'，我们把 a' 与 b' 所成的锐角或直角叫作**异面直线 a 与 b 所成的角**，其大小范围为 $(0°，90°]$.

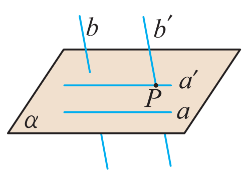


图 4.3－10

如果两条异面直线 a 与 b 所成的角为 $90°$，则称这两条**异面直线互相垂直**，记作 $a \perp b$.

在平面几何里，如果直线 $b // c$，直线 $a \perp b$，那么 $a \perp c$. 这个结论对空间中的三条满足条件的直线也成立. 我们也可以根据这个道理来定义异面直线的垂直：

如图 4.3－11，设 a，b 是异面直线，过 a 上任意一点 A 作直线 c，使 $c // b$，如果 $a \perp c$，就称 $a \perp b$.

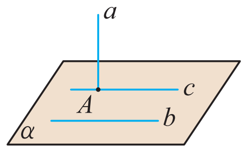


图 4.3－11

如果 $a \perp b$，那么 a，b 共面吗？

例 5 如图 4.3－12，已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体.

（1）求异面直线 AA_1 与 BC 所成的角；

（2）求异面直线 BC_1 与 AC 所成的角.

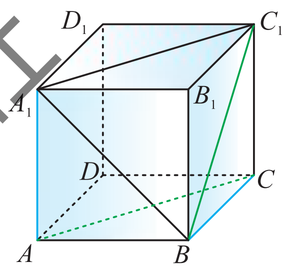


图 4.3－12

解 （1）因为 $AD // BC$，

所以 $\angle A_1AD$ 即为直线 AA_1 与 BC 所成的角.

因为 $\angle A_1AD = 90°$，

所以直线 AA_1 与 BC 所成的角为 $90°$.

（2）连接 A_1C_1，A_1B.

因为 $AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CC_1$，所以四边形 ACC_1A_1 为平行四边形，

所以 $AC // A_1C_1$.

因此直线 BC_1 与 AC 所成的角就是直线 BC_1 与 A_1C_1 所成的角.

因为 $A_1B = \sqrt{2}a$，$BC_1 = \sqrt{2}a$，$A_1C_1 = \sqrt{2}a$，

所以 $A_1B = BC_1 = A_1C_1$.

因此，直线 BC_1 与 A_1C_1 所成的角为 $60°$，

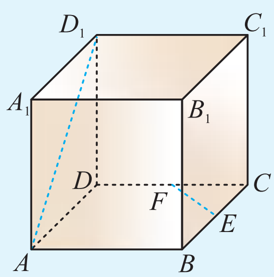
即直线 BC_1 与 AC 所成的角为 $60°$.

练 习

1. 图 4.3－12 中的直线 AA_1 在平面 AA_1B_1B 内，CC_1 在平面 CC_1B_1B 内，直线 AA_1 与 CC_1 是异面直线吗？

2. 直线 a 和两条异面直线 b，c 都相交，画出每两条相交直线所确定的平面，并标上字母.

3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 = a$，E，F 分别是 BC，DC 的中点. 求异面直线 AD_1 与 EF 所成角的大小.

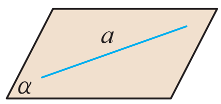
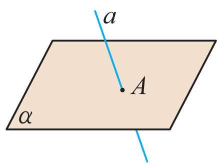
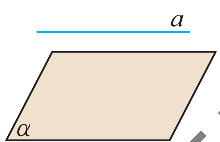


（第 3 题）

4.3.2 空间中直线与平面的位置关系

观察教室，可以发现，墙面和地面的相交线在地面上，相邻两墙面的相交线和地面只相交于一点，而墙面和天花板的相交线无论怎么延伸都与地面没有交点．这些现象反映出直线和平面之间存在着不同的位置关系．

空间中一条直线和一个平面的位置关系，有且只有以下三种：

位置关系	图　形	写　法	公共点情况
直线在平面内		$a\subset\alpha$	直线上所有的点都是公共点
直线和平面相交		$a\cap\alpha=A$	有且只有一个公共点
直线和平面平行		$a/\!/\alpha$	没有公共点

一般地，直线 a 在平面 α 内时，应把直线 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 不在平面 α 内时，表示直线的线段要有一部分或全部画在表示平面 α 的平行四边形外．

我们把直线和平面相交或平行的情况统称为**直线在平面外**．

与研究平面内两直线的位置关系类似，空间中，我们重点研究直线与平面平行、直线与平面垂直这两种位置关系．

一　直线与平面平行

直线 l 与平面 α 平行，是指直线 l 与平面 α 没有公共点．也就是说，l 与 α 的交集是$\varnothing$．用符号表示为

$$l/\!/\alpha \Leftrightarrow l\cap\alpha=\varnothing.$$

如何判断已知平面 α 外一条直线 l 与该平面 α 平行？

如图 4.3－13，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B_1/\!/AB$，当直线 AB 沿直线 BC 平移时，就形成了平面 AC，直线 AB 在平移过程中的每一个位置都与 A_1B_1 平行，因此直线 A_1B_1 与平面 AC 没有公共点．

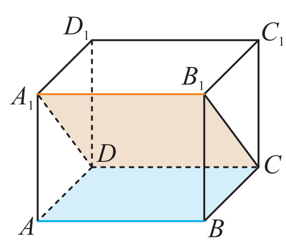


图 4.3－13

同样，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC /\!/ AB$. 当直线 DC 沿直线 CB_1 平移时，就形成了平面 A_1C，且直线 DC 在平移过程中总是与 AB 平行，因此直线 AB 与平面 A_1C 也没有公共点.

一般地，有以下关于**直线与平面平行的判定定理**：

> **如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.**

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ a \not\subset \alpha，b \subset \alpha，a /\!/ b，则\ a /\!/ \alpha.$$

> 运用直线与平面平行的判定定理时，$a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a /\!/ b$ 这三个条件缺一不可.

由上述判定定理可知，画一条直线与已知平面平行时，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行(图 4.3－14).

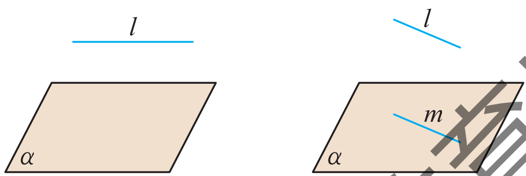


图 4.3－14

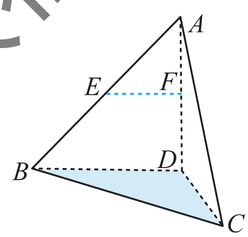


图 4.3－15

例 6 如图 4.3－15，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点. 求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

证明 在△ABD 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，

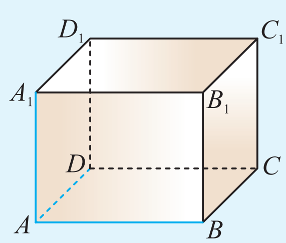
所以 $EF /\!/ BD$.

又 $EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

因此 $EF /\!/$ 平面 BCD.

练 习

1. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各面所在的平面中，分别写出与直线 AB，AA_1，AD 平行的平面.



（第 1 题）

2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

（1）若 $a \not\subset \alpha$，$a /\!/ b$，则 $a /\!/ \alpha$；

（2）若 $b \subset \alpha$，$a /\!/ b$，则 $a /\!/ \alpha$.

3. 使矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 紧靠桌面并绕 AB 转动，当 AB 的对边 CD 转动到各个位置时，是不是都与桌面所在的平面平行？为什么？

前面我们已经由平面外的一条直线与平面内的一条直线平行(“线线平行”)，得到了判定平面外的直线与此平面平行(“线面平行”)的方法，反过来，能不能由“线面平行”得出“线线平行”?

如图 4.3－16，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，由于 $A'C' /\!/ AC$，因而直线 $A'C' /\!/$ 平面 $ABCD$，但 BD 与 $A'C'$ 不平行(为什么?)．也就是说，一条直线与平面平行，并不能保证这个平面内的所有直线都与这条直线平行.

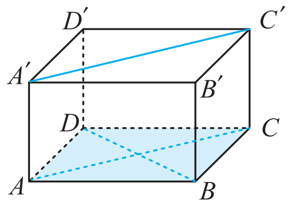


图 4.3－16

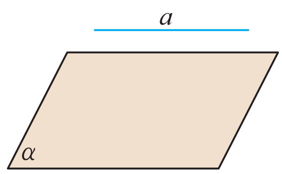


图 4.3－17

如图 4.3－17，由直线与平面平行的定义可知，如果一条直线 a 与平面 α 平行，那么 a 与 α 无公共点，即 a 上的点都不在 α 内，因而 α 内的任何直线都与直线 a 没有公共点．这样，平面 α 内的直线与平面 α 外的直线 a 只能是异面或平行．那么，在什么条件下，平面 α 内的直线与直线 a 平行呢?

由于 a 与平面 α 内的任何直线均没有公共点，所以，过直线 a 的某一平面，若与平面 α 相交，则直线 a 就平行于这条交线.

下面，我们来证明这一结论.

如图 4.3－18，$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b$，

求证：$a /\!/ b$.

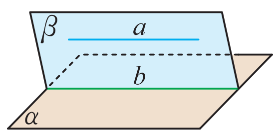


图 4.3－18

证明　因为 $\alpha \cap \beta = b$，所以 $b \subset \alpha$.

又因为 $a /\!/ \alpha$，所以 a 与 b 没有公共点.

又因为 $a \subset \beta$，$b \subset \beta$，

所以 $a /\!/ b$.

由上可得**直线与平面平行的性质定理**：

> **一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.**

用符号语言描述上述定理，即为

若 $a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b$，则 $a /\!/ b$.

直线与平面平行的性质定理揭示了直线与平面平行中蕴含着直线与直线平行.

例 7 如图 4.3－19，点 A，B 分别位于异面直线 a，b 上，过 AB 中点 O 的平面 α 与 a，b 都平行，M，N 分别是 a，b 上异于 A，B 的另外两点，MN 与 α 交于点 P.

求证：P 是 MN 的中点.

证明 连接 AN，设它与平面 α 交于点 Q，连接 OQ，PQ.

因为 OQ 是平面 ABN 与 α 的交线，$b/\!/\alpha$，

所以 $OQ/\!/BN$.

同理可证 $QP/\!/AM$.

在$\triangle ABN$ 中，O 是 AB 的中点，$OQ/\!/BN$，

所以 Q 是 AN 的中点.

又因为 $QP/\!/AM$，

所以点 P 是 MN 的中点.

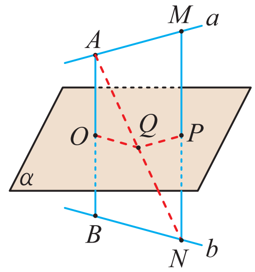


图 4.3－19

例 8 如图 4.3－20，在一块木料中，已知 $BC/\!/$平面 $A'B'C'D'$，要经过木料表面 $A'B'C'D'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？

解 因为 $BC/\!/$平面 $A'B'C'D'$，$BC\subset$平面 $BB'C'C$，平面$BB'C'C\cap$平面$A'B'C'D'=B'C'$，

所以由直线与平面平行的性质定理可得 $BC/\!/B'C'$.

经过点 P，在木料表面 $A'B'C'D'$ 内画线段 EF，使 $EF/\!/B'C'$，则$EF/\!/BC$，

因此 EF 与 BC 可确定一个平面 $BCFE$.

连接 BE 和 CF，

则 BE，CF 和 EF 就是所要画的线.

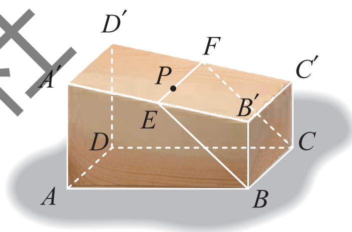


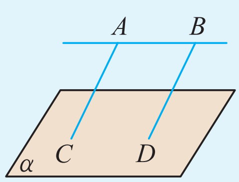
图 4.3－20

在处理空间线面之间的关系问题时，我们往往要将其转化为一个平面内的问题来解决.

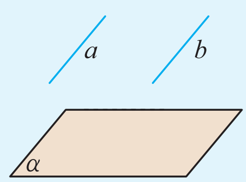
练 习

1. 求证：过平面内一点的直线平行于与该平面平行的一条直线，那么这条直线在该平面内.

2. 如图，已知 $AB/\!/$平面 α，$AC/\!/BD$，且 AC，BD 与 α 分别相交于点 C，D，求证：$AC=BD$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知直线 a，b 都不在平面 α 内，且 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，求证：$b/\!/\alpha$.

二 直线与平面垂直

观察学校操场上竖立的旗杆与地面的位置关系，可以发现，它给我们以直线与平面垂直的形象．在阳光下，还可以发现旗杆 AB 所在直线与地面内任意一条过点 B 的影子所在直线垂直．事实上，旗杆 AB 与地面内任意一条直线垂直，如图 4.3－21.

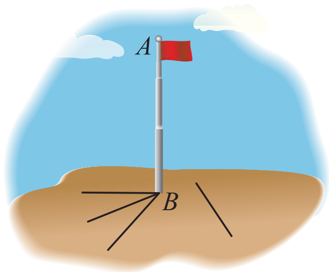


图 4.3－21

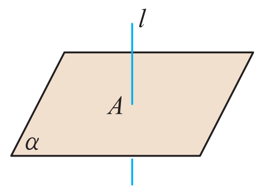


图 4.3－22

如图 4.3－22，如果直线 l 与平面 α 相交，并且垂直于这个平面内的所有直线，那么就称**直线 l 与平面 α 垂直**，记作 $l\perp\alpha$．直线 l 叫作平面 α 的**垂线**，平面 α 叫作直线 l 的**垂面**，它们的交点叫作**垂足**．过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直．

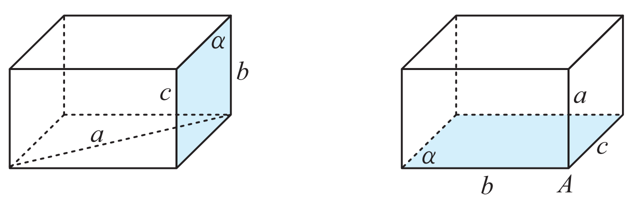
> 一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，这条直线是否垂直于这个平面?

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 4.3－22.

由直线与平面垂直的定义可知，若直接用定义来检验直线是否与平面垂直，则需验证直线与平面内所有直线都垂直，这无法完成，因而我们需寻求容易操作的方法来判断直线与平面垂直．

观察图 4.3－23(1)中的长方体，我们发现，b，c 是平面 α 内的两条平行直线，虽然直线 $a\perp b$，$a\perp c$，但直线 a 与平面 α 并不垂直．

再观察图 4.3－23(2)，我们发现 $b\cap c=A$，$a\perp b$，$a\perp c$，并且直线 a 与直线 b，c 确定的平面 α 垂直．



(1)　　(2)

图 4.3－23

一般地，有以下关于**直线与平面垂直的判定定理**：

> **如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直．**

> 定理中的“两条相交直线”这一条件不能忽略．

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ a\subset\alpha,\ b\subset\alpha,\ l\perp a,\ l\perp b,\ a\cap b=A,\ 则\ l\perp\alpha.$$

例 9 如图 4.3-24，某校操场上正在竖一根高 16 m 的旗杆．为了确保旗杆与地面垂直，某工作人员在点 A 处挂了一条长 20 m 的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上的 C 点和 D 点（C，D 和旗杆下端 B 不在同一条直线上）．如果 C，D 两点和旗杆下端点 B 的距离均是 12 m，那么旗杆就与地面垂直．为什么？

解 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 中，

因为 $AB=16$ m，$BC=BD=12$ m，$AC=AD=20$ m，

所以 $AB^2+BC^2=16^2+12^2=20^2=AC^2$，

$AB^2+BD^2=16^2+12^2=20^2=AD^2$．

所以$\angle ABC=\angle ABD=90°$．

即 $AB\perp BC$，$AB\perp BD$．

又 B，C，D 三点不共线，且 $BC\cap BD=B$，

所以 $AB\perp$平面 BCD，即旗杆与地面垂直．

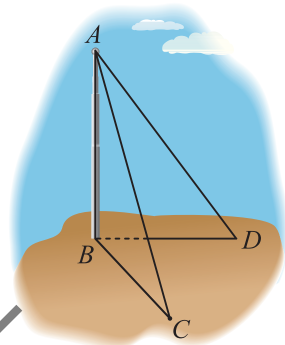


图 4.3-24

例 10 求证：如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面．

已知：如图 4.3-25，$l/\!/m$，$l\perp\alpha$．

求证：$m\perp\alpha$．

证明 如图 4.3-25，在平面 α 内作两条相交直线 a，b．

因为 $l\perp\alpha$，则 $l\perp a$，$l\perp b$．

又 $m/\!/l$，所以 $m\perp a$，$m\perp b$．

又直线 a，b 相交，因此 $m\perp\alpha$．

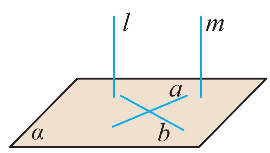
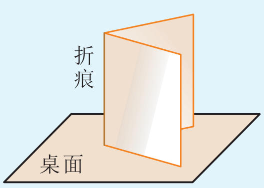


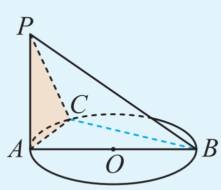
图 4.3-25

练习

1. 拿一张矩形的纸对折后略为展开，竖立在桌面上，说明折痕为什么和桌面垂直．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在平面，C 是圆 O 上不同于 A，B 的任一点，求证：$BC\perp$平面 PAC．

3. 在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VA=VC$，$AB=BC$，点 D 为 AC 的中点，求证：$AC\perp$平面 VBD．

我们知道，若两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面．试问：垂直于同一个平面的两条直线是否平行呢？即如果 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，那么 $a/\!/b$ 吗？

如图 4.3－26，假设直线 b 与 a 不平行．设 $b\cap\alpha=O$，b'是经过点 O 与直线 a 平行的直线，平面 β 经过直线 b 与 b'，$\alpha\cap\beta=c$.

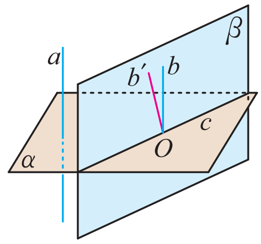


图 4.3－26

因为 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，

所以 $a\perp c$，$b\perp c$.

又因为 $b'/\!/a$，

所以 $b'\perp c$.

这样，在平面 β 内，经过直线 c 上一点 O 就有两条直线 b，b'都与 c 垂直，这是不可能的.

所以 $b/\!/a$.

由上可得**直线与平面垂直的性质定理**：

> **垂直于同一个平面的两条直线平行.**

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ a\perp\alpha，b\perp\alpha，则\ a/\!/b.$$

初中度量两平行线间的距离时，我们总是将其转化为点到直线的距离．求平行于平面的直线到该平面的距离是否也可进行类似的转换？这种转换合理吗？

答案是肯定的．我们先看一个定义：

如图 4.3－27，过一点 S 向平面 ABC 作垂线，垂足为 A，则称垂线段 SA 的长度为**点 S 到平面 ABC 的距离**.

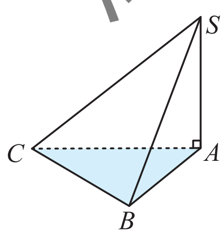


图 4.3－27

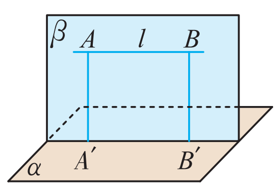


图 4.3－28

例 11 已知：如图 4.3－28，直线 $l/\!/$平面 α.

求证：直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

证明 过直线 l 上任意两点 A，B 分别作平面 α 的垂线 AA'，BB'，垂足分别为 A'，B'.

因为 $AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，所以 $AA'/\!/BB'$.

设经过直线 AA'和 BB'的平面为 β，

则 β 与 α 的交线为直线 $A'B'$.

因为 $l/\!/\alpha$，则 $l/\!/A'B'$，

从而四边形 $A'B'BA$ 是平行四边形，

所以 $AA'=BB'$，即直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

于是，我们有：一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离，叫作这条**直线与**这个**平面的距离**.

如图 4.3－29，一条直线 l 与一个平面 α 相交，但不与平面 α 垂直，则直线 l 称为平面 α 的一条斜线，斜线 l 与平面 α 的交点 A 称为斜足. 过斜线 l 上斜足以外的一点 P 向平面 α 作垂线，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 称为斜线 l 在平面 α 上的投影. 平面的一条斜线与它在该平面上的投影所成的锐角，叫作这条**直线与这个平面所成的角**.

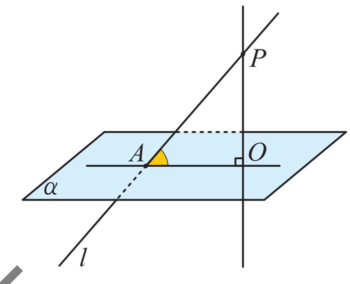


图 4.3－29

当直线 l 与平面 α 平行或在平面 α 内时，直线 l 与平面 α 所成的角为 $0°$. 当直线 l 与平面 α 垂直时，直线 l 与平面 α 所成的角为 $90°$. 故直线 l 与平面 α 所成角的取值范围是 $[0°, 90°]$.

例 12 如图 4.3－30，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2BB_1=2BC=2a$，E 为 A_1B_1 的中点，连接 EA，EB，EC，BD_1 和 BD.

（1）求直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值；

（2）求直线 AD 到平面 EBC 的距离.

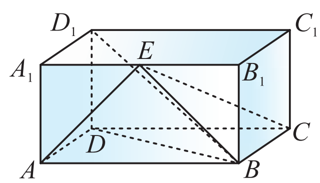


图 4.3－30

解 （1）因为棱 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp BD$，

即 $\angle D_1BD$ 就是直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.

所以，$\cos\angle D_1BD=\dfrac{BD}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{6}a}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

（2）因为直线 $AD/\!/BC$，$AD\not\subset$ 平面 EBC，$BC\subset$ 平面 EBC，

所以直线 $AD/\!/$ 平面 EBC.

所以直线 AD 到平面 EBC 的距离即为点 A 到平面 EBC 的距离.

由于 E 为 A_1B_1 的中点，所以 $AE=BE=\sqrt{2}a$，

从而 $AE^2+BE^2=4a^2=AB^2$，因此 $AE\perp BE$.

又 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AE$.

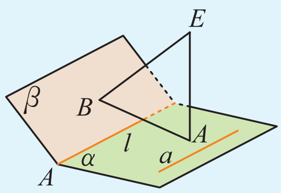
又 $BE\cap BC=B$，所以 $AE\perp$ 平面 EBC.

所以，点 A 到平面 EBC 的距离为 AE，且为 $\sqrt{2}a$.

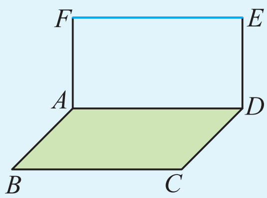
因此，直线 AD 到平面 EBC 的距离为 $\sqrt{2}a$.

练 习

1. 如图，已知 $\alpha\cap\beta=l$，$EA\perp\alpha$ 于点 A，$EB\perp\beta$ 于点 B，$a\subset\alpha$，$a\perp AB$，求证：$a/\!/l$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AF\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AF=DE$，$AD=6$，求 EF 的长度.

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求直线 A_1B 和平面 A_1DCB_1 所成的角.

多知道一点

推理与证明

推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们生活和学习中经常使用的思维方式.

推理一般包括合情推理与演绎推理.

合情推理即合乎情理的推理，最常见的就是归纳与类比.

由一系列有限的特殊事例得出一般结论的推理方法叫作**归纳**. 例如，图 1 展示了一些特殊的多面体：四面体、五面体、六面体、七面体、八面体、九面体.

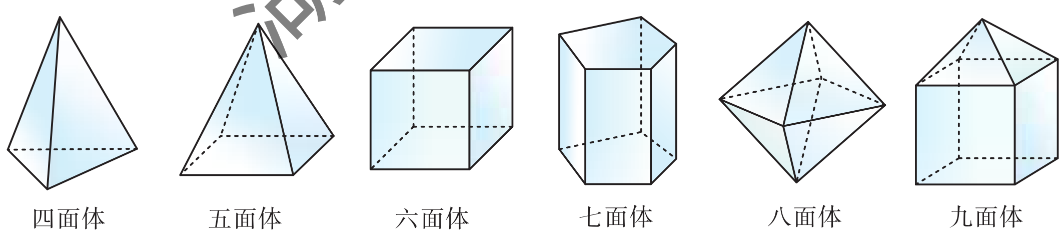


图 1

欧拉通过观察图中多面体的面数 F(face)、顶点数 V(vertex)、棱数 E(edge)，进而推算出：$V+F-E=2$. 他猜想：任意凸多面体的面数 F、顶点数 V、棱数 E 均满足

$$V+F-E=2.$$

后来欧拉证明了这个猜想，这就是著名的欧拉公式.

运用归纳推理的一般步骤为：首先，通过观察特例发现某些共性或一般规律；然后，把这种共性推广为一般性命题（猜想）；最后，对所得出的一般性猜想进行检验和证明.

> 欧拉（Euler，1707—1783），瑞士数学家、物理学家. 他是数学史上著名的高产数学家，被人们称为“数学界的莎士比亚”.

用归纳推理可以帮助我们从具体事例中发现一般规律．但应注意的是，仅根据一系列有限的特殊事例所得出的一般结论不一定可靠，只是一种合情推理，其结论正确与否还需要经过理论的证明和实践的检验．

根据两个不同的对象在某方面的相似之处，推测出这两个对象在其他方面也可能有相似之处的推理方法叫作**类比**．例如，矩形和长方体这两种几何图形间可以建立如下一些类比关系：

矩　形	长方体
每相邻两边互相垂直	每相邻两棱互相垂直
对边互相平行	对棱互相平行
对边长度相等	对棱长度相等
对角线相等	对角线相等
…	…

演绎推理与归纳推理的过程相反，它是从一般到特殊的推理．演绎推理的主要形式就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理．

例 1　如图 2，D，E，F 分别是 BC，CA，AB 上的点，$\angle A=\angle BFD$，$DE /\!/ BA$．

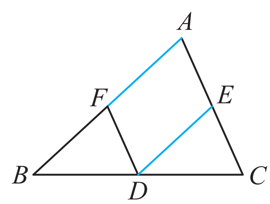


图 2

求证：$ED=AF$．

证明　（1）同位角相等，两直线平行，（大前提）

$\angle BFD$ 与 $\angle A$ 是同位角，且 $\angle BFD=\angle A$，（小前提）

所以 $DF /\!/ EA$．（结　论）

（2）两组对边分别平行的四边形是平行四边形，（大前提）

$DE /\!/ BA$ 且 $DF /\!/ EA$，（小前提）

所以四边形 $AFDE$ 为平行四边形．（结　论）

（3）平行四边形的对边相等，（大前提）

ED 和 AF 为平行四边形的对边，（小前提）

所以 $ED=AF$．（结　论）

上面的证明通常简略地表述为：

$$\left.\begin{array}{r}\angle BFD=\angle A\Rightarrow DF /\!/ EA\\ DE /\!/ BA\end{array}\right\}\Rightarrow \text{四边形 } AFDE \text{ 是平行四边形}\Rightarrow ED=AF.$$

演绎推理是一种必然性推理，演绎推理的前提与结论之间有蕴含关系，因而只要大前提、小前提都是真实的，推理的形式是正确的，那么结论必是真实的．但错误的前提可能导致错误的结论．

在数学证明中，有两种常用证明思路：一是直接证明，二是间接证明．

综合法和分析法是最基本的直接证明方法．从已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最

后推出待证结论或要求的问题，这种证明方法称为**综合法**．反过来，从待证结论或待求问题出发，一步一步地探索结论成立的充分条件，最后达到题设的已知条件或已被证明的事实，这种证明方法称为**分析法**．

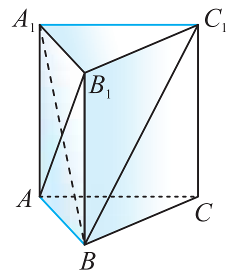


图 3

例 2　如图 3，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB_1\perp BC_1$，$AB=CC_1$．试用综合法和分析法证明：$A_1C_1\perp AB$．

证明　（综合法）连接 A_1B．

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $AB=CC_1=BB_1$，

所以四边形 ABB_1A_1 为正方形．

因此 $AB_1\perp A_1B$．

又 $AB_1\perp BC_1$，且 $A_1B\cap BC_1=B$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC_1，

故 $AB_1\perp A_1C_1$．

又 $BB_1\perp A_1C_1$，且 $AB_1\cap BB_1=B_1$，所以 $A_1C_1\perp$ 平面 A_1ABB_1，

故 $A_1C_1\perp AB$．

（分析法）连接 A_1B．

$A_1C_1\perp AB\Leftarrow A_1C_1\perp$ 平面 A_1ABB_1

$$\Leftarrow\begin{cases}A_1C_1\perp BB_1\Leftarrow BB_1\perp \text{平面 } A_1B_1C_1\Leftarrow \text{直棱柱定义}.\\ A_1C_1\perp AB_1\Leftarrow AB_1\perp \text{平面 } A_1BC_1,\\ BB_1\cap AB_1=B_1,\end{cases}$$

$$\text{而 } AB_1\perp \text{平面 } A_1BC_1\Leftarrow\begin{cases}AB_1\perp BC_1\text{（已知）},\\ AB_1\perp A_1B\Leftarrow \text{四边形 } A_1ABB_1 \text{ 是正方形}\Leftarrow AB=CC_1=BB_1,\\ BC_1\cap A_1B=B.\end{cases}$$

由此，命题得证．

从例 2 可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，执果索因，逐步靠拢“已知”．其逐步推理实际上是要寻找它的充分条件．综合法的特点是：从“已知”看“可知”，由因导果，逐步推向“未知”，其逐步推理实际上是寻找它的必要条件．

间接证明不是从正面确定论题的真实性，而是证明它的反论题为假，或改证它的等价命题为真，以间接地达到目的．反证法是间接证明的一种基本方法．

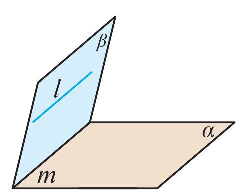


图 4

例 3　如图 4，直线 l 平行于平面 α，β 是过直线 l 的平面，平面 α 与 β 相交于直线 m．

求证：直线 l 平行于直线 m．

证明　假设命题的结论不成立，即“直线 l 不平行于直线 m”．由于直线 l，m 在同一平面 β 中，且直线 l，m 不平行，则直线 l，m 相交．设交点为 P，又点 P 在直线 m 上，故点 P 在平面 α 上．所以直线 l 与平面 α 相交于点 P．这与条件“直线 l 平行于平面 α”矛盾．因此，假设不成立，故原命题成立．

先假设原命题的否定成立，从这个假设出发，经过推理，得出与已知事实相矛盾的结论，这个矛盾的结果说明原命题结论的否定不成立，从而间接肯定了原命题结论成立. 像这种间接证法，称为**反证法**.

反证法的一般步骤：

(1) 反设：假设所要证明的结论不成立，而设结论的反面成立；

(2) 归谬：由“反设”出发，通过正确的推理，导出矛盾——与已知条件，已知的基本事实、定义、定理矛盾或自相矛盾；

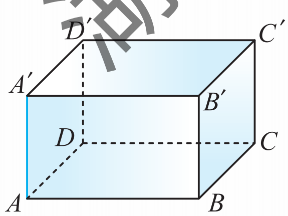
(3) 结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于“反设”的谬误，即结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

运用反证法的关键在于导出矛盾.

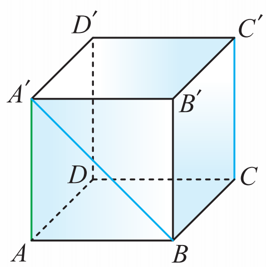
习题 4.3

学而时习之

1. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的六个表面中，指出 AA' 在哪些平面内，与哪些平面相交，与哪些平面平行.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$.

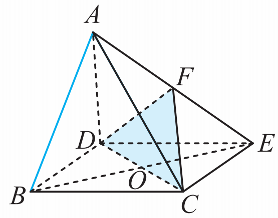
(1) 哪些棱所在直线与直线 BA' 是异面直线？

(2) 直线 BA' 和 CC' 的夹角是多少度？

(3) 哪些棱所在直线与直线 AA' 垂直？

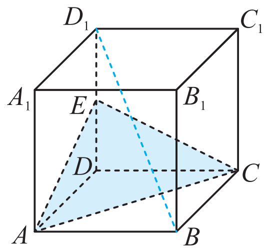
3. 如图，四棱锥 $A-DBCE$ 中，O 为底面平行四边形 $DBCE$ 对角线的交点，F 为 AE 的中点.

求证：$AB//$ 平面 DCF.

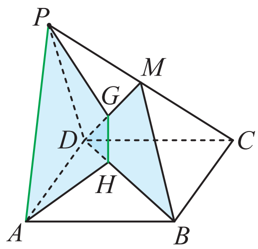


（第 3 题）

4. 如图，E 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱 DD_1 的中点，求证：$BD_1 /\!/$ 平面 AEC.



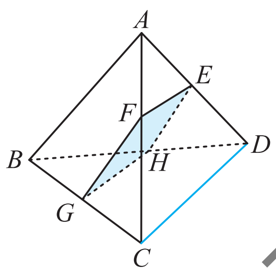
（第 4 题）



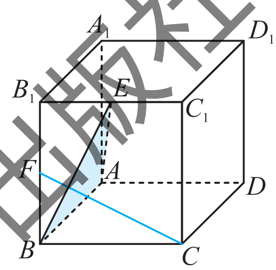
（第 5 题）

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 P 是平面$ABCD$外一点，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 HG，求证：$AP /\!/ HG$.

6. 如图，三棱锥 $A-BCD$ 被一平面所截，截面为平行四边形 $EFGH$，求证：$CD /\!/$ 平面 $EFGH$.



（第 6 题）



（第 7 题）

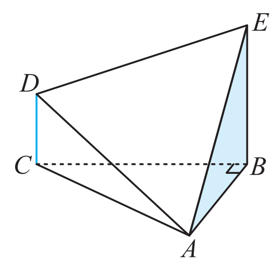
7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 B_1C_1，B_1B 的中点，求证：$CF\perp$ 平面 EAB.

8. 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 $AA'=5$，$AB=12$，$AD=13$.

(1) 求点 B 和点 D' 之间的距离；

(2) 求直线 CD 和平面 $AA'B'B$ 的距离；

(3) 求点 A' 到平面 $B'C'DA$ 的距离.



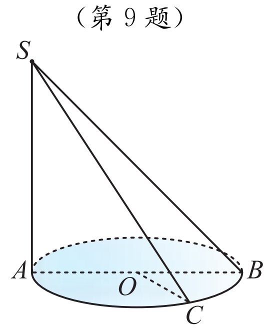
（第 9 题）

9. 如图，在几何体 $A-BCDE$ 中，$DC\perp$ 平面 ABC，$EB\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=2$，$AC=5$.

(1) 求证：$DC /\!/$ 平面 ABE；

(2) 求直线 DC 与平面 ABE 的距离.

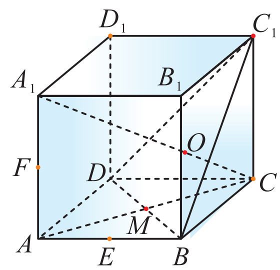
10. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 为该圆上的一点，$\angle AOC=120^\circ$，$SA\perp \odot O$ 所在的平面，$SA=AB$，求 SC 与 $\odot O$ 所在的平面所成的角的正切值.



（第 10 题）

温故而知新

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O，AC 与 BD 交于点 M，E 为 AB 的中点，F 为 AA_1 的中点. 求证：



（第 11 题）

（1）C_1，O，M 三点共线；

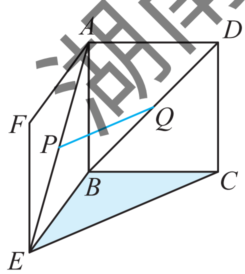
（2）E，C，D_1，F 四点共面.

12. 已知 A 是平面 BCD 外的一点，E，F 分别是 BC，AD 的中点.

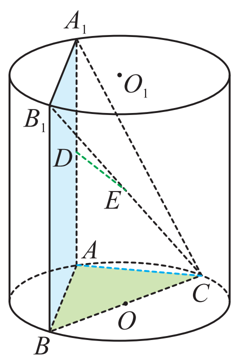
（1）求证：直线 EF 与 BD 是异面直线；

（2）若 $AC\perp BD$，$AC=BD$，求直线 EF 与 BD 所成的角.

13. 如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 所在平面相交于 AB，在对角线 AE，BD 上各有一点 P，Q，且 $AP=DQ$. 求证：$PQ/\!/$平面 BCE.（用两种方法证明）



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，AA_1，BB_1 为圆柱 OO_1 的母线(母线与底面垂直)，BC 是底面圆 O 的直径，D，E 分别是 AA_1，CB_1 的中点.

（1）求证：$AC\perp$平面 AA_1B_1B；

（2）求证：$DE/\!/$平面 ABC.

4.4 平面与平面的位置关系

如图 4.4－1，观察长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，可以发现，它的任一侧面和底面都有一条公共直线．同时，它的上下两个底面无论怎么延伸，都没有公共点．

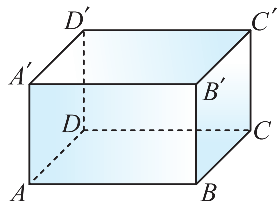


图 4.4－1

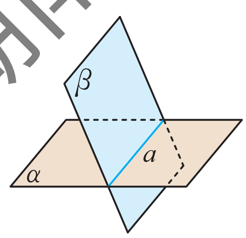
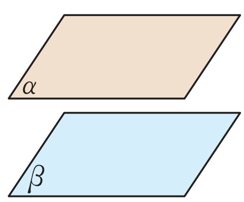
这些面的位置关系，反映出了两个不重合的平面的不同位置关系．

如果两个平面 α，β 没有公共点，就称这**两个平面平行**，记作 $\alpha /\!/ \beta$．

用集合语言描述，就是

$$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing.$$

我们将空间中任意两个不重合的平面的位置关系列表如下：

位置关系	图　形	写　法	公共点情况
两平面相交		$\alpha \cap \beta = a$	有一条公共直线
两平面平行		$\alpha /\!/ \beta$	没有公共点

画两个互相平行的平面时，要使表示平面的两个平行四边形的对应边平行．

与研究直线与平面的位置关系类似，我们重点研究两个平面之间的平行和垂直关系．

4.4.1 平面与平面平行

一 平面与平面平行的判定

由定义可知，判定平面与平面平行的关键在于判定两个平面有没有公共点．若一个平面内的所有直线都与另一个平面平行，那么这两个平面平行．由于每个平面可以由两条不同的直线确定，我们可以考虑根据其中一个平面内两条直线平行于另一个平面来判定平面与平面平行．

观察图 4.4－2 中的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，平面 $A'ABB'$ 内有两条平行直线 $A'B'$ 与 EF 都平行于平面 $ABCD$，但平面 $A'ABB'$ 与平面 $ABCD$ 相交而不平行．

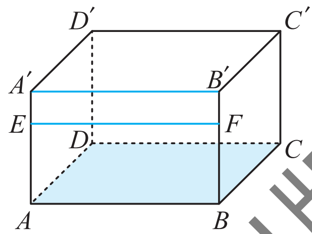


图 4.4－2

观察图 4.4－2，我们还可以发现：在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，平面 $ABCD$ 内的两条相交直线 AB，BC 都与平面 $A'B'C'D'$ 平行，平面 $ABCD$ 也与平面 $A'B'C'D'$ 平行．事实上，假如平面 $ABCD$ 与平面 $A'B'C'D'$ 相交于某条直线 l，则直线 AB，BC 都与直线 l 平行，这与直线 AB，BC 相交矛盾．

一般地，有以下关于**平面与平面平行的判定定理**：

> **如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行．**

用符号语言描述上述定理，即为(图 4.4－3)

若 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=A$，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$．

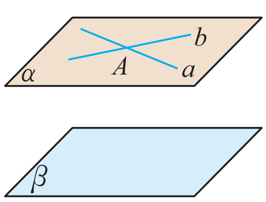


图 4.4－3

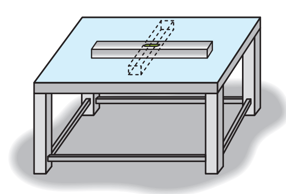


图 4.4－4

这一定理在日常生活中也经常被用到．如图 4.4－4，木工师傅常将气泡水平仪在桌面上交叉放两次，若每次气泡均在中间，则可判断该桌面是水平的．

例 1 在如图 4.4－5 所示的五面体中，三个面 AA_1B_1B，BB_1C_1C，CC_1A_1A 都是平行四边形. 求证：平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC.

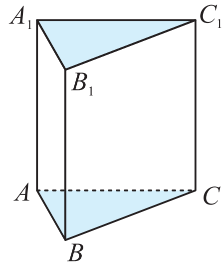


图 4.4－5

证明 因为四边形 AA_1B_1B 是平行四边形，

所以 $A_1B_1 /\!/ AB$.

又 $A_1B_1 \not\subset$ 平面 ABC，$AB \subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1B_1 /\!/$ 平面 ABC.

同理，$B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC.

又 $A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$，

所以平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC.

例 2 如图 4.4－6，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点.

求证：平面 $AMN /\!/$ 平面 $EFDB$.

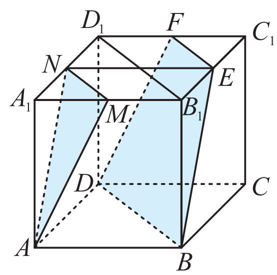


图 4.4－6

证明 如图 4.4－6，连接 B_1D_1，NE. 因为 M，N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点，

所以 $MN /\!/ B_1D_1$，$EF /\!/ B_1D_1$，因而 $MN /\!/ EF$.

又 $MN \not\subset$ 平面 $EFDB$，$EF \subset$ 平面 $EFDB$，

因此 $MN /\!/$ 平面 $EFDB$.

在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，N，E 分别是棱 A_1D_1，B_1C_1 的中点，

所以 $NE \underline{/\!/} A_1B_1$.

从而 $NE \underline{/\!/} AB$，因此 $AN /\!/ BE$.

又 $AN \not\subset$ 平面 $EFDB$，$BE \subset$ 平面 $EFDB$，

所以 $AN /\!/$ 平面 $EFDB$.

又 $AN \subset$ 平面 AMN，$MN \subset$ 平面 AMN，且 $AN \cap MN = N$，

因此平面 $AMN /\!/$ 平面 $EFDB$.

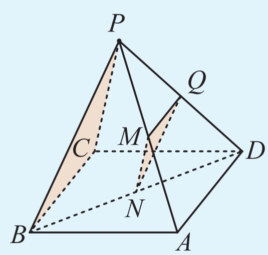
练习

1. 下面的说法正确吗？试说明理由.

（1）如果一个平面内的两条直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

（2）平行于同一平面的两平面平行.

2. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，点 M，N，Q 分别在 PA，BD，PD 上，且 $\dfrac{PM}{MA}=\dfrac{BN}{ND}=\dfrac{PQ}{QD}$. 求证：平面 $MNQ /\!/$ 平面 PBC.



（第 2 题）

二 平面与平面平行的性质

如果两个平面平行，那么一个平面内的直线是否平行于另一个平面？

由两个平面平行及直线与平面平行的定义可知，如果两个平面平行，那么，其中一个平面内的任何一条直线必定平行于另一个平面.

进一步思考：分别在两个平行平面内的直线是否平行？

显然，分别在两个平行平面内的两条直线必定没有公共点，所以这两条直线平行或异面.

观察任何一个长方体，我们可发现，若两个平行平面内的两条直线还在同一个平面内，则它们平行.

下面我们来证明上述结论.

如图 4.4－7，$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$.

因为 $\alpha /\!/ \beta$，则 $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

又 $a \subset \alpha$ 且 $b \subset \beta$，因此 $a \cap b = \varnothing$.

因为直线 a，b 没有公共点，且在同一平面 γ 内，

所以 $a /\!/ b$.

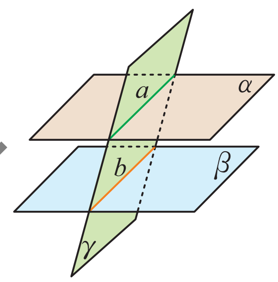


图 4.4－7

由上可得**平面与平面平行的性质定理**：

> **两个平面平行，如果一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行.**

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ \alpha /\!/ \beta，\alpha \cap \gamma = a，\beta \cap \gamma = b，则\ a /\!/ b.$$

例 3 如图 4.4－8，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M 是 A_1C_1 的中点，平面 $AB_1M /\!/$ 平面 BC_1N，$AC \cap$ 平面 $BC_1N = N$.

求证：（1）$NC_1 /\!/ AM$；（2）N 为 AC 的中点.

证明 （1）因为平面 $AB_1M /\!/$ 平面 BC_1N，

平面 $AB_1M \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AM$，

平面 $BC_1N \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = C_1N$，

所以 $NC_1 /\!/ AM$.

（2）因为 $AC /\!/ A_1C_1$，$NC_1 /\!/ AM$，

所以四边形 ANC_1M 为平行四边形，

所以 $AN = C_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$，

所以 N 为 AC 的中点.

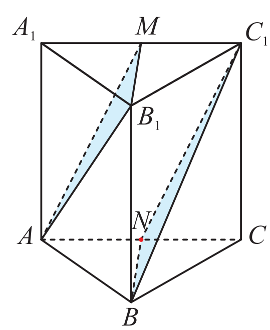


图 4.4－8

例 4 求证：夹在两个平行平面间的两条平行线段相等.

已知：如图 4.4－9，平面 α∥平面 β，AB 和 DC 为夹在 α，β 间的平行线段.

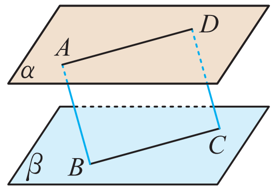


图 4.4－9

求证：$AB=DC$.

证明 因为 AB∥DC，

所以 AB 和 DC 确定平面 AC.

又因为直线 AD，BC 分别是平面 AC 与平面 α，β 的交线，

所以 AD∥BC，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

所以 $AB=DC$.

类似于平行于平面的直线到该平面的距离，我们有：

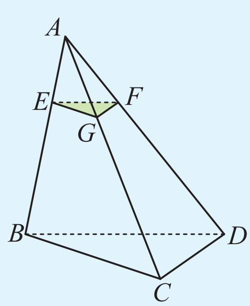
如果平面 α 平行于平面 β，则称平面 α 上任意一点到平面 β 的距离为**平面 α 到平面 β 的距离.**

综合前面的知识可知，直线与直线平行（线线平行）、直线与平面平行（线面平行）、平面与平面平行（面面平行）之间可以相互转化，它们之间的转化关系可用框图（图 4.4－10）来表示：

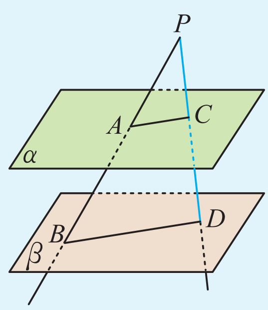
图 4.4－10

练 习

1. 如图，在棱锥中，$AE:AB=1:3$，截面 EFG∥底面 BDC. 已知△BDC 的周长是 18，求△EFG 的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知平面 α∥平面 β，点 P 是平面 α，β 外一点，且直线 PB，PD 分别与 α，β 相交于点 A，B 和点 C，D. 如果 $PA=4$ cm，$AB=5$ cm，$PC=3$ cm，求 PD 的长.

4.4.2 平面与平面垂直

一 平面与平面垂直的判定

观察任何一个长方体，可以发现长方体的任何两个相邻的面都给我们以互相垂直的形象．我们知道，两条直线互相垂直，是说它们的夹角是直角．由此可以猜测，如果两个平面的夹角是直角，那么这两个平面应该互相垂直．如何刻画两个平面的夹角呢？

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**，这条直线叫作**二面角的棱**，这两个半平面叫作**二面角的面**．如图 4.4－11，棱为 AB、面分别为 α，β 的二面角记作二面角 $\alpha-AB-\beta$．有时为了方便，也可在 α，β 内(棱以外的半平面部分)分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 $P-AB-Q$．若棱为 l，则这个二面角也可记作二面角 $\alpha-l-\beta$ 或 $P-l-Q$．

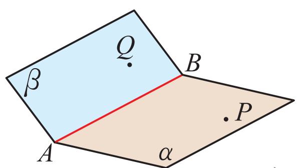


图 4.4－11

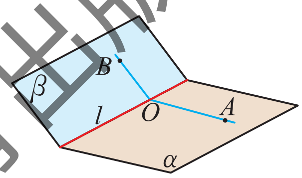


图 4.4－12

如图 4.4－12，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫作**二面角的平面角**．

> $\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度．

例如，我们常说的黄赤交角是 $23°26'$，实质上是说黄道平面与赤道平面所成二面角的平面角是 $23°26'$，如图 4.4－13．图 4.4－14 是一物体从一斜坡下滑至货车车厢上的示意图，则 $\angle\alpha$ 可看作是斜坡与水平面所成二面角的平面角．

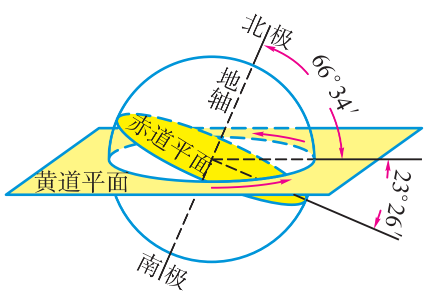


图 4.4－13

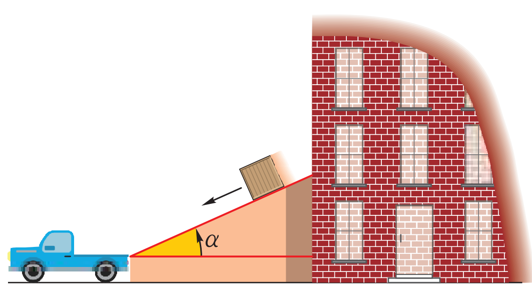


图 4.4－14

平面角是直角的二面角叫作**直二面角**.

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**. 若平面 α，β 互相垂直，则记作 $\alpha\perp\beta$.

在画两个垂直的平面时，通常把表示直立平面的平行四边形的竖边画成与表示水平平面的平行四边形的横边垂直(如图 4.4－15).

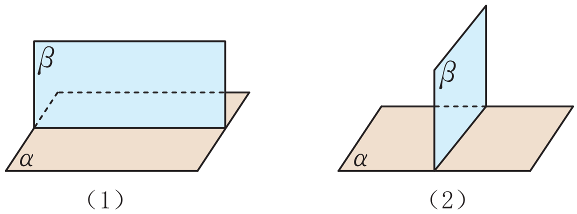


图 4.4－15

除了定义外，还有什么方法判定两个平面垂直？前面我们已经通过平面 α 内两条相交直线平行于平面 β 来判定 $\alpha/\!/\beta$，是不是也可以通过平面 α 内的直线垂直于平面 β 来判定 $\alpha\perp\beta$？

观察图 4.4－16 中的长方体，可以发现，平面 $ABB'A'$ 内的直线 $A'B$ 与 AB' 都不垂直于平面 $ABCD$，但有一条直线 AA' 垂直于平面 $ABCD$，并且平面 $ABCD$ 与平面 $ABB'A'$ 互相垂直.

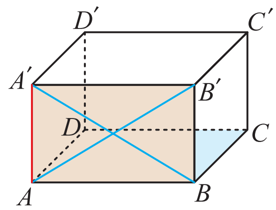


图 4.4－16

一般地，有以下**两个平面垂直的判定定理**：

> **如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.**

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ a\subset\alpha，a\perp\beta，则\ \alpha\perp\beta.$$

这一定理在日常生活中经常使用. 如图 4.4－17，建筑工人常用一端系有铅锤的线来检查所砌墙面是否与水平平面垂直. 如果系有铅锤的线紧贴墙面，就说明墙面垂直于水平平面. 如图 4.4－18，木工师傅检查工件相邻的两个平面是否垂直时，只要用曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，将另一边靠在工件的另一个面上，如果尺边与这个面紧密贴在一起，就说这两个平面互相垂直.

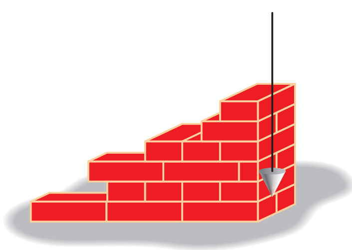


图 4.4－17

图 4.4－18

例 5 如图 4.4－19，在四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，四个侧面都是矩形.

求证：平面 $BB'C'C \perp$ 平面 $ABCD$.

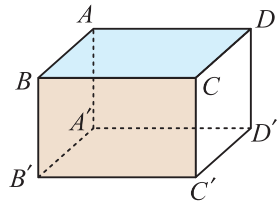


图 4.4－19

证明 因为侧面 $BB'C'C$ 是矩形，

所以 $CC' \perp BC$.

因为侧面 $CC'D'D$ 是矩形，

所以 $CC' \perp CD$.

又 $BC \cap CD = C$，因此 $CC' \perp$ 平面 $ABCD$.

又 $CC' \subset$ 平面 $BB'C'C$，

所以平面 $BB'C'C \perp$ 平面 $ABCD$.

例 6 如图 4.4－20，已知△ABC 中，AD 是边 BC 上的高，以 AD 为折痕折叠△ABC，使∠BDC 为直角.

求证：平面 $ABD \perp$ 平面 BDC，平面 $ADC \perp$ 平面 ABD.

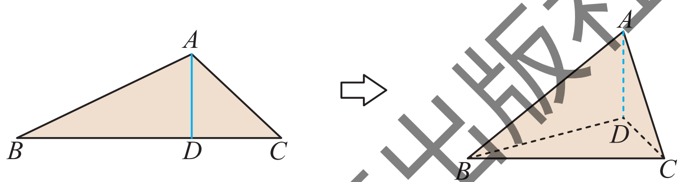


图 4.4－20

证明 因为 $AD \perp BD$，$AD \perp DC$，$BD \cap DC = D$，

所以 $AD \perp$ 平面 BDC.

因为 $AD \subset$ 平面 ABD，

所以平面 $ABD \perp$ 平面 BDC.

已知∠BDC 为直角，

所以 $BD \perp DC$.

又 $AD \cap DC = D$，因此 $BD \perp$ 平面 ADC.

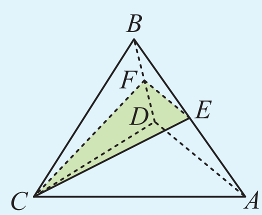
因为 $BD \subset$ 平面 ABD，

所以平面 $ADC \perp$ 平面 ABD.

练习

1. 尝试用硬卡纸来制作互相垂直的两个平面和两两垂直的三个平面.

2. 如图，在四面体 $B-ACD$ 中，$CB=CD$，$AD \perp BD$，且 E，F 分别是 AB，BD 的中点. 求证：平面 $EFC \perp$ 平面 BCD.



（第 2 题）

3. 已知三条直线 l，m，n，两个平面 α，β. 若 $l /\!/ \alpha$，$m /\!/ \beta$，$n /\!/ \beta$，m，n 不平行，且 $l \perp m$，$l \perp n$，求证：$\alpha \perp \beta$.

二 平面与平面垂直的性质

教室黑板所在平面与地面垂直，黑板所在平面内的直线是否都垂直于地面？你能否在黑板上画一条直线与地面垂直？你所画的直线与地面之间的位置关系是怎样的？

借助图 4.4－21 中的长方体模型，可以发现，若平面 $\alpha\perp$平面 β，且平面 α 内的直线 a 垂直于 α 与 β 的交线 b，则$a\perp\beta$. 下面我们来证明这一结论.

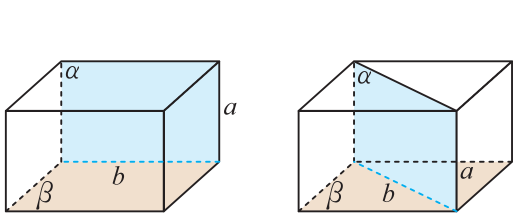


图 4.4－21

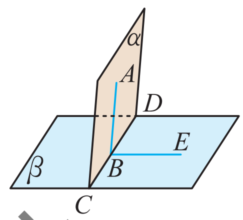


图 4.4－22

如图 4.4－22，设平面 $\alpha\perp$平面 β，$\alpha\cap\beta=CD$，且平面 α 内的直线 AB 垂直 CD 于点 B.

在平面 β 内作直线 $EB\perp CD$，

因而$\angle ABE$ 就是二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的平面角.

因为 $\alpha\perp\beta$，

所以$\angle ABE=90^\circ$.

所以 $AB\perp BE$.

又 $AB\perp CD$，$CD\cap BE=B$，

因此 $AB\perp\beta$.

由上可得关于**两个平面垂直的性质定理**：

> **两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直.**

用符号语言描述上述定理，即为

$$若\ \alpha\perp\beta，\alpha\cap\beta=CD，AB\subset\alpha，AB\perp CD，则\ AB\perp\beta.$$

例 7 证明：如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点且垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

已知：$\alpha\perp\beta$，$P\in\alpha$，$P\in a$，$a\perp\beta$.

求证：$a\subset\alpha$.

证明 如图 4.4－23，设 $\alpha\cap\beta=c$，在平面 α 内过点 P 作直线 $b\perp c$.

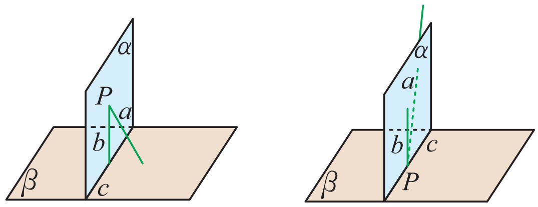


图 4.4－23

根据两个平面垂直的性质定理可知 $b\perp\beta$.

又 $a\perp\beta$，$a\cap b=P$，而过一点有且只有一条直线与平面 β 垂直，

所以直线 a 与直线 b 重合，因此 $a\subset\alpha$.

例 8 如图 4.4－24，已知 AB 是⊙O 的直径，C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC. 试判断 BC 与平面 PAC 的位置关系，并证明.

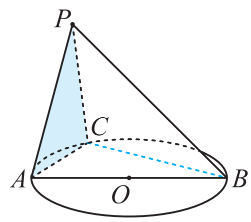


图 4.4－24

解 $BC\perp$ 平面 PAC. 证明如下：

因为 AB 是⊙O 的直径，C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，

所以 $\angle ACB=90°$，

因此 $BC\perp AC$.

已知平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，

而平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，平面 ABC 内的直线 BC 垂直于 AC，

所以 $BC\perp$ 平面 PAC.

综合前面的知识可知，直线与直线垂直（线线垂直）、直线与平面垂直（线面垂直）、平面与平面垂直（面面垂直）之间可以相互转化，它们之间的转化关系可用框图（图 4.4－25）来表示：

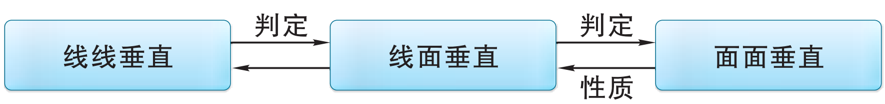


图 4.4－25

练习

1. 判断下列命题是否正确，并说明理由.

（1）若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$；

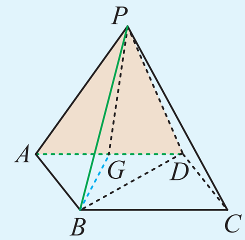
（2）若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\cap\gamma=a$，则 $a\perp\alpha$；

（3）三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

2. 如图，P 是四边形$ABCD$ 所在平面外的一点，四边形$ABCD$是$\angle DAB=60^{\circ}$的菱形，$PA=PD$，平面 PAD 垂直于底面 $ABCD$，G 为 AD 边的中点. 求证：

(1) $BG\perp$平面 PAD；

(2) $AD\perp PB$.



（第 2 题）

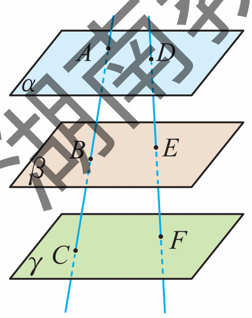
习题 4.4

学而时习之

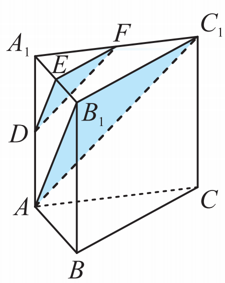
1. (1) 平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，问：$\alpha /\!/ \beta$ 是否成立？为什么？

(2) 平面 α 内所有直线与平面 β 都平行，问：$\alpha /\!/ \beta$ 是否成立？为什么？

2. 如图，$\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$，直线 AC 分别交平面 α，β，γ 于点 A，B，C，直线 DF 分别交平面 α，β，γ 于点 D，E，F. 求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.



（第 2 题）



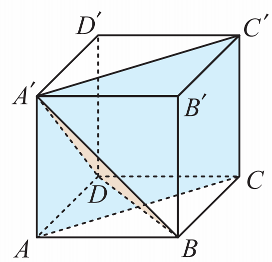
（第 3 题）

3. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E，F 分别是棱 AA_1，A_1B_1，A_1C_1 的中点. 求证：平面 $DEF /\!/$ 平面 AB_1C_1.

4. 已知平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，直线 $a /\!/ \alpha$，且 $a \not\subset \beta$. 求证：$a /\!/ \beta$.

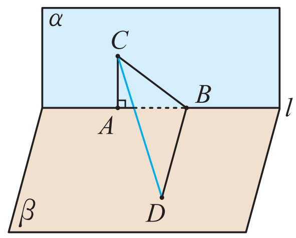
5. 求证：如果三条共点直线两两互相垂直，那么它们中每两条直线分别确定的三个平面也两两互相垂直.

6. 如图，已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，试求证：平面 $ACC'A'\perp$平面 $A'BD$.

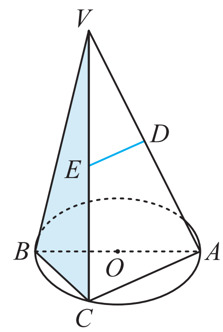


（第 6 题）

7. 如图，平面$\alpha\perp$平面β，在α与β的交线l上取线段$AB=4$，$AC\subset\alpha$，$BD\subset\beta$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，且$AC=3$，$BD=12$，求CD的长.



（第 7 题）



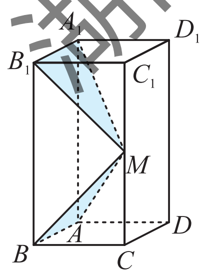
（第 8 题）

8. 如图，AB是$\odot O$的直径，点C是$\odot O$上的动点. 过动点C的直线VC垂直于$\odot O$所在平面，D，E分别是VA，VC的中点，直线DE与平面VBC有什么关系？试说明理由.

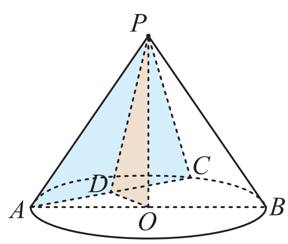
温故而知新

9. 求证：过已知平面外一点且平行于该平面的直线，都在过已知点且平行于该平面的平面内.

10. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，M是棱CC_1的中点. 求证：平面$ABM\perp$平面A_1B_1M.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，在圆锥PO中，已知$PO=\sqrt{2}$，$\odot O$的直径$AB=2$，C是$\overset{\frown}{AB}$上一点（异于A，B），D为AC的中点. 求证：平面$POD\perp$平面PAC.

12. 试证明：如果平面α和不在这个平面内的直线a都垂直于平面β，那么$a/\!/\alpha$.

正四棱锥的截面

使用计算机软件，可以直接进行立体几何作图，还能测量空间的距离和角度.

本实验的任务是画一个正四棱锥和它被各种位置的平面所截的截面图. 通过作图和测量，探讨截面可能是哪种图形. 例如，会不会是正三角形、正方形、正五边形、正六边形?

打开“超级画板”，执行菜单命令“作图｜棱锥｜正四棱锥”，作出一个底面为四边形 $ABCD$，顶点为 F 的正四棱锥，如图 1.

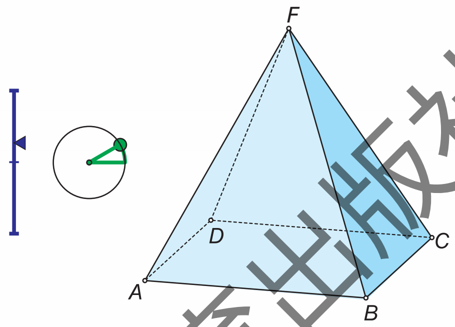


图 1

它真是一个正四棱锥吗? 我们可以测量它的棱长和有关的角度来进行检验. 例如，选择 A，B 两点，执行菜单命令“测量｜距离｜两点的距离”，屏幕上就会显示出测量的数据. 顺次选择 A，B，C 三点，执行菜单命令“测量｜角｜角的值”，屏幕上就会显示出 $\angle ABC$ 的度数.

测量哪些几何量，才能确定它是正四棱锥呢?

现在作一个平面来截正四棱锥.

不共线的三点确定一个平面，因此可以在四棱锥的三条棱上取点. 执行菜单命令“作图｜自由点｜自由点”，或单击作点图标，鼠标的光标变成了握笔的手. 移动光标使笔尖接近棱 AB，棱 AB 变色时单击左键，就作出了棱 AB 上的一点 G. 继续操作，在棱 AD，BF 上分别作点 H，I. 最后单击选择图标退出作点状态.

顺次选择棱 DF 和新作的 G，H，I 三点(选择两个或更多对象时，要按着 Ctrl 键)，执行菜单命令“作图｜结束点｜直线和平面的交点”，便作出了平面 GHI 和直线 DF 的交点 J. 类似地，作出平面 GHI 和直线 CF 的交点 K.

顺次选择 G，H，J，K，I 五点，执行菜单命令“作图｜特殊图形｜多边

形”，作出截面多边形. 选择此多边形单击右键，在打开的对话框里单击“属性”，可在属性对话框里将多边形填色.

测量截面的边长和角度，并判断截面多边形是否是正五边形. 拖动 G，H，I 三点，能否得到正五边形？

如果不成功，可以拖动点 F 调整锥高，探索哪种正四棱锥能截出正五边形.

若想看到截面的样子，可以顺次选择 G，H，J，K，I 五点，执行菜单命令“作图｜克隆平面多边形到投影平面”，得到五个克隆点，再把这五个点拖到适当的位置，作成多边形并填色，如图 2.

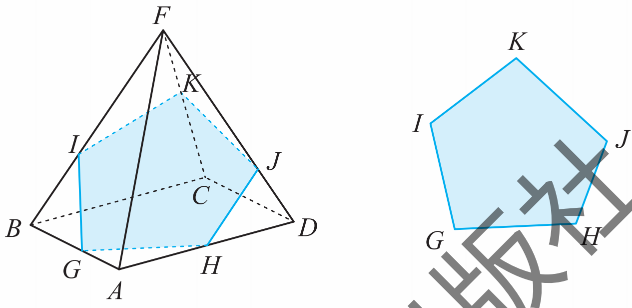


图 2

类似地，你可以作出其他多面体，研究其截面的性质.

4.5 几种简单几何体的表面积和体积

前面我们从直观的角度初步认识了几种简单几何体，并且研究了构成这些几何体的基本元素之间的位置关系．下面我们将从度量的角度来学习如何计算这几种简单几何体的表面积和体积，同时进一步加深对这几种简单几何体的认识．

4.5.1 几种简单几何体的表面积

一 棱柱的表面积

棱柱、棱锥、棱台的表面都由底面和侧面组成，因而其表面积（也称全面积）就是其底面积和侧面积之和．由于其底面都是多边形，而多边形的面积我们已经会计算，因而计算这三种几何体的表面积的关键在于计算其侧面积．

与初中计算直棱柱、圆锥的侧面积方法一样，一般都是将棱柱、棱锥、棱台的侧面展开成平面图形，从而将其侧面积转化为平面图形的面积来计算．

如图 4.5－1，将一直棱柱的侧面沿其一侧棱剪开后，其侧面展开图是一个矩形．

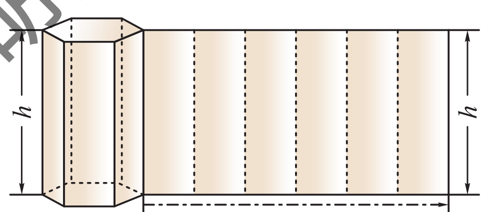


图 4.5－1

由于这个矩形的长等于直棱柱的底面周长，宽等于直棱柱的高，因此直棱柱的侧面积计算公式为

$$S_{直棱柱侧}=Ch,$$

其中，C 为直棱柱的底面周长，h 为直棱柱的高．

此公式也适用于计算圆柱的侧面积．

二　棱锥的表面积

如图 4.5－2，对于正棱锥，其侧面都是全等的等腰三角形，因而，若将其侧面沿其一侧棱剪开，则可得到一个由一些全等的等腰三角形构成的平面图形.

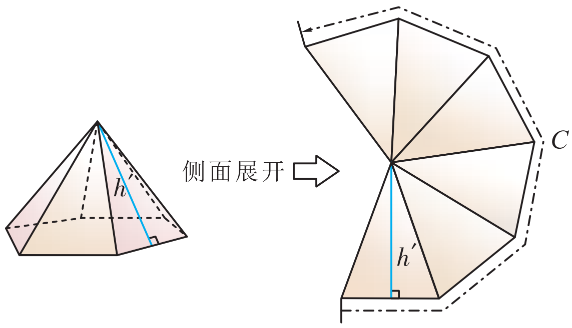


图 4.5－2

因此，由三角形的面积计算公式可得，正棱锥的侧面积计算公式为

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}Ch',$$

其中，C 为正棱锥的底面周长，h' 为侧面等腰三角形的高.

任意棱锥的侧面积如何来计算？

例 1　如图 4.5－3，正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 4，顶点 S 到底面中心 O 的距离为 4，求它的表面积.

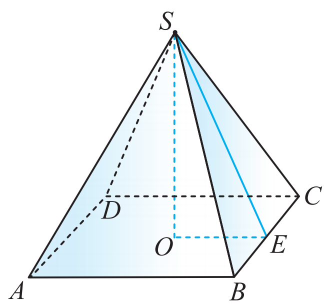


图 4.5－3

解　作 $SE\perp BC$，垂足为点 E，连接 OE.

因为 $SO\perp OE$，

所以 $SE^2=SO^2+OE^2$.

因为 $SE\perp BC$，$SO\perp BC$，

所以 $BC\perp$ 平面 SOE，

所以 $BC\perp OE$，故 $OE=2$.

又 $SO=4$，所以 $SE=2\sqrt{5}$.

又底面周长 $C=4\times4=16$，

所以 $S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}Ch'$

$=\frac{1}{2}\times16\times2\sqrt{5}$

$=16\sqrt{5}$.

又 $S_{\text{底}}=4\times4=16$，

因此，该正四棱锥的表面积为 $S_{\text{表}}=16+16\sqrt{5}$.

三 棱台的表面积

如图 4.5－4，对于正棱台，若将其沿一侧棱剪开，则可得其侧面展开图是由一些全等的等腰梯形构成的平面图形.

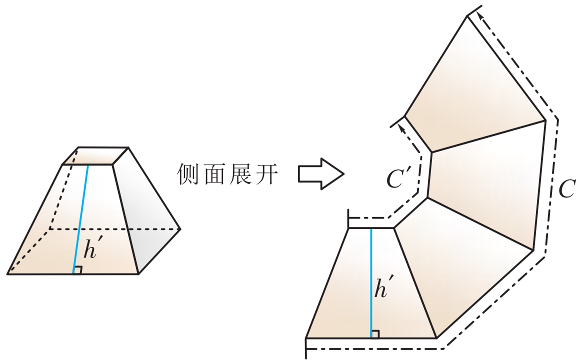


图 4.5－4

根据梯形的面积计算公式，容易得到正棱台的侧面积计算公式为

$$S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(C+C')h',$$

其中 C，C' 为棱台两底面的周长，h' 为棱台侧面的高.

例 2 图 4.5－5 是一个正四棱台形的石墩．已知它的上底面边长为 30 cm，下底面边长为 40 cm，侧面梯形的高 h' 为 30 cm．在不计下底面所占面积的情况下，试计算这个物体的表面积(结果单位为 m^2).

图 4.5－5

解　由题意可知，上底面周长为

$$C'=4\times30=120(\text{cm}),$$

下底面周长为

$$C=4\times40=160(\text{cm}),$$

则 $S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(C+C')h'$

$=\frac{1}{2}(160+120)\times30$

$=4\ 200(\text{cm}^2)$.

又上底面积为 $30\times30=900(\text{cm}^2)$，

所以表面积为 $900+4\ 200=5\ 100(\text{cm}^2)$.

又 $5\ 100\ \text{cm}^2=0.51\ \text{m}^2$，

因此，在不计下底面所占面积的情况下，这个物体的表面积为 $0.51\ \text{m}^2$.

四　球的表面积

虽然球的表面积不能像棱柱、棱锥、棱台那样通过展开成平面图来计算，但它的表面积由半径 R 唯一确定，是以 R 为自变量的函数，其计算公式为

$$S_{球}=4\pi R^2.$$

例 3　如图 4.5－6，某种“浮球”是由两个直径是 6 cm 的半球和一个圆柱筒组成，其中圆柱筒长 2 cm. 要在 2 500 个“浮球”表面涂一层胶质，如果每平方米需要涂胶 100 g，大约需胶多少克(π 取 3)?

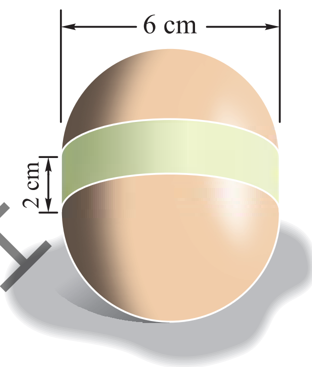


图 4.5－6

解　根据题意，上、下两个半球的表面积是

$$S_{球表}=4\pi R^2=4\times\pi\times9=36\pi(\text{cm}^2),$$

而“浮球”的圆柱筒侧面积为

$$S_{圆柱侧}=2\pi Rh=2\times\pi\times3\times2=12\pi(\text{cm}^2).$$

所以 1 个“浮球”的表面积为

$$S=36\pi+12\pi=48\pi(\text{cm}^2).$$

因此，2 500 个“浮球”的表面积的和为

$$2\ 500S=2\ 500\times48\pi=120\ 000\pi(\text{cm}^2).$$

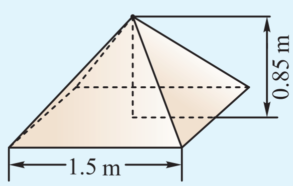
又 $120\ 000\pi\ \text{cm}^2=12\pi\ \text{m}^2$，

所以需要胶的质量总共为

$$100\times12\pi=1\ 200\pi\approx3\ 600(\text{g}).$$

练习

1. 如图，设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板(结果保留两位有效数字)?



（第 1 题）

2. 一个几何体的上、下底面都是正方形，四个侧面都是全等的等腰梯形，已知等腰梯形的上底为 9 cm，下底为 15 cm，腰为 5 cm，求该几何体的表面积.

3. 某球形天然气储存罐的直径为 3 m，现要将其表面全部镀锌，已知每平方米用锌 0.11 kg，求电镀 50 个这样的储存罐需要锌多少千克(π 取 3.14).

多知道一点

圆台的侧面积

在初中，我们把圆柱、圆锥的侧面沿着各自的一条母线剪开，并展开，易求得 $S_{圆柱侧}=Cl=2\pi Rl$，$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi Rl$，其中 R 是底面半径，C 是底面周长，l 是母线长.

将圆台的侧面沿着它的一条母线剪开，就可得到其展开图如图 1 所示.

设圆台的母线长为 l，上、下底面周长分别是 C'，C，半径分别是 R'，R. 圆台可看作是用平行于圆锥底面的平面去截这个圆锥得到的，设截去的小圆锥的母线长为 x，则截之前的大圆锥的母线长为 $x+l$. 于是圆台的侧面展开图是一个半径为 $x+l$ 的扇形去掉一个与它具有同一个圆心角，但半径为 x 的小扇形之后剩下的部分，因此

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}C(l+x)-\frac{1}{2}C'x$$

$$=\frac{1}{2}[Cl+(C-C')x]. \quad ①$$

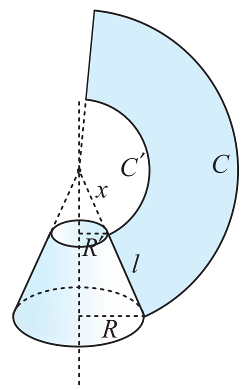


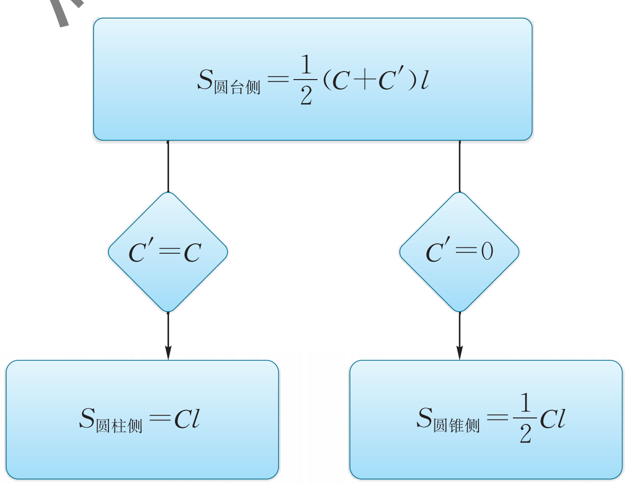
图 1

由 $\frac{C'}{C}=\frac{x}{x+l}$，得 $x=\frac{C'l}{C-C'}$.

代入①，得

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}\left[Cl+(C-C')\frac{C'l}{C-C'}\right]=\frac{1}{2}(C+C')l=\pi(R+R')l.$$

在圆台的侧面积公式中，如果 $C'=C$，则就是圆柱的侧面积公式 $S_{圆柱侧}=Cl$；如果 $C'=0$，则就是圆锥的侧面积公式 $S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl$. 这样，圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式之间有如下关系：



可见，圆柱、圆锥的侧面积也可以统一用圆台的侧面积公式来计算.

4.5.2 几种简单几何体的体积

南北朝时期，我国数学家祖暅得出了“幂势既同，则积不容异”这一结论，意思是：夹在平行平面 α，β 之间的两个形状不同的几何体，被平行于平面 α，β 的任意一个平面所截，如果截面 P 和 Q 的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等(如图 4.5－7).

> 后人将这一结论称为“祖暅原理”.

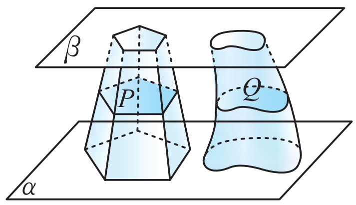


图 4.5－7

数学上已经证明这一结论成立．我们在生活中也可直观体会到这一结论的正确性．如图 4.5－8，取一摞纸堆放在桌面上组成一个几何体，改变它的形状，得到了另一个几何体，但两个几何体的高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而几何体的体积不变.

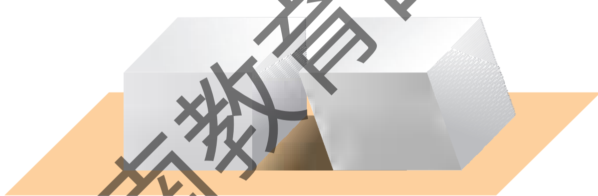


图 4.5－8

基于这一结论，我们来探讨几种简单几何体的体积.

计算长方体的体积需要知道长方体的高．我们把锥体(棱锥、圆锥)的顶点到底面的距离称为**锥体的高**．图 4.5－9 中的 PO 即为棱锥 $P-ABCD$ 的高．台体(棱台、圆台)或柱体(棱柱、圆柱)的两底面之间的距离称为**台体**或**柱体的高**．图 4.5－10 中的 OO' 即为棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 的高.

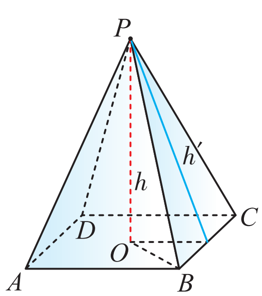


图 4.5－9

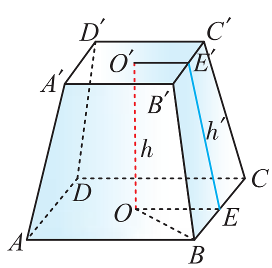


图 4.5－10

> 锥体或台体的高 h 与计算其侧面积公式的高 h' 有什么联系？

一　棱柱的体积

长方体的体积 V 等于长方体的底面积 S 与高 h 的乘积，即 $V=Sh$.

如果一个棱柱与一个长方体的高相同(都为 h)，底面积相等(都为 S)，那么当我们用一个与底面平行的任意平面去截它们时(如图 4.5－11)，可以证明这些截面的面积都等于 S，根据祖暅原理可知，棱柱的体积与长方体的体积相等．于是棱柱的体积计算公式为

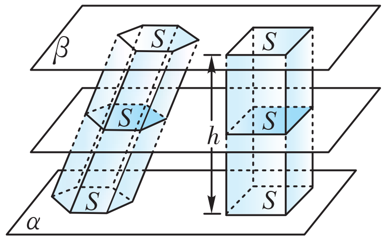


图 4.5－11

$$V_{棱柱}=Sh,$$

其中 S 为棱柱的底面积，h 为棱柱的高.

此公式也适用于计算圆柱的体积.

例 4　如图 4.5－12，三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$BC\perp AC$，$BC=5$ cm，$CA=12$ cm，$AA'=20$ cm．$A'H\perp$平面 ABC，垂足为 H，$\angle A'AH=60°$．求这个三棱柱的体积.

解　在 Rt$\triangle A'AH$ 中，因为 $AA'=20$ cm，$\angle A'AH=60°$，

所以　$A'H=AA'\sin 60°=10\sqrt{3}$ cm.

在$\triangle ABC$ 中，$BC\perp AC$，$BC=5$ cm，$CA=12$ cm，

所以　$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CA=30$ cm^2.

于是　$V=Sh=30\times 10\sqrt{3}=300\sqrt{3}$(cm^3).

因此，这个三棱柱的体积为 $300\sqrt{3}$ cm^3.

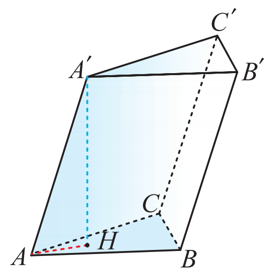


图 4.5－12

二　棱锥的体积

如图 4.5－13，我们可把三棱锥 $A'-ABC$ 以$\triangle ABC$ 为底面、AA'为侧棱补成三棱柱 $A'B'C'-ABC$，反过来，也可把这个三棱柱分割成三个三棱锥 $A'-ABC$，$B'-A'BC$，$C'-A'B'C$.

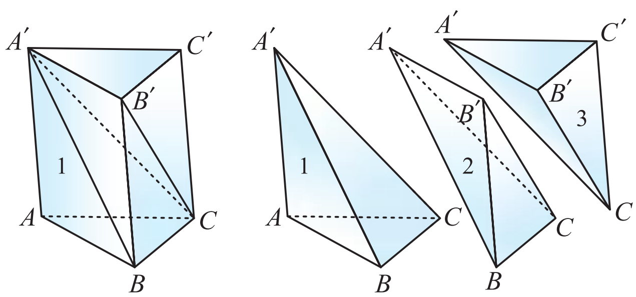


图 4.5－13

三棱锥 $A'-ABC$，$B'-A'BC$ 都可将点 C 看作顶点，则它们的底面分别为 $\triangle ABA'$，$\triangle B'A'B$，且点 C 到平面 $ABB'A'$ 的距离均可作为这两个三棱锥的高．由 $S_{\triangle ABA'}=S_{\triangle B'A'B}$ 可知，$V_{A'\text{-}ABC}=V_{B'\text{-}A'BC}$．同理可得，$V_{B'\text{-}A'BC}=V_{C'\text{-}A'B'C}$，故

$$V_{A'\text{-}ABC}=V_{B'\text{-}A'BC}=V_{C'\text{-}A'B'C}=\frac{1}{3}V_{三棱柱}.$$

于是，三棱锥的体积是等底面积、等高的三棱柱体积的三分之一．

将其推广到一般的棱锥，可得棱锥的体积公式为

$$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh,$$

其中 S 为棱锥底面积，h 为棱锥的高．

此公式也适用于计算圆锥的体积．

例 5 如图 4.5－14(1)，埃及胡夫金字塔大约建于公元前 2580 年，其形状为正四棱锥．已知该金字塔高约 146.5 m，底面边长约 232 m，求这座金字塔的侧面积和体积(结果分别精确到 0.1 m^2 和 0.1 m^3)．

(1)　　(2)

图 4.5－14

解 根据题意可抽象出图 4.5－14(2)，其中 AC 为高，则 $AC=146.5$ m，$BC=116$ m，底面周长 $C=4\times232$ m.

$$\begin{aligned}S_{侧面积}&=\frac{1}{2}C\cdot AB\\&=\frac{1}{2}\times4\times232\times\sqrt{116^2+146.5^2}\\&\approx464\times186.864\ 3\\&\approx86\ 705.0(\mathrm{m}^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}S_{底}\cdot AC\\&=\frac{1}{3}\times232^2\times146.5\\&\approx2\ 628\ 405.3(\mathrm{m}^3).\end{aligned}$$

因此，这座金字塔的侧面积约为 86 705.0 m^2，体积约为 2 628 405.3 m^3．

三 棱台的体积

由于棱台可看作是用平行于棱锥底面的一个平面截这个棱锥得到的，因此，棱台的体积可以用两个棱锥的体积差来计算，如图 4.5－15 所示.

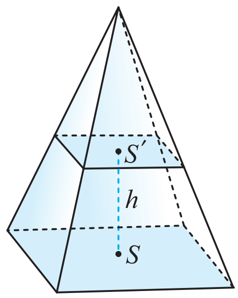


图 4.5－15

经过计算(过程从略)得出棱台的体积计算公式为

$$V_{棱台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h,$$

其中 S'，S 分别为棱台的上底、下底面积，h 为棱台的高.

由于棱柱(两底面面积相等)与棱锥(一个底面面积为 0)都可看作棱台的特殊情况，因此棱柱、棱锥、棱台的体积计算公式之间有如下关系：

$V_{棱台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$

$S'=S$ → $V_{棱柱}=Sh$

$S'=0$ → $V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$

四 球的体积

设球的半径为 R，它的体积只与半径 R 有关，是以 R 为自变量的函数，其计算公式为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

今后，我们学习更多的知识后将可推导球的体积公式，这里从略.

例 6 如图 4.5－16，一个装有水的圆柱形玻璃杯的内径为 3 cm．将一个玻璃球完全浸入水中，杯中水的高度上升了 0.5 cm．求玻璃球的半径．

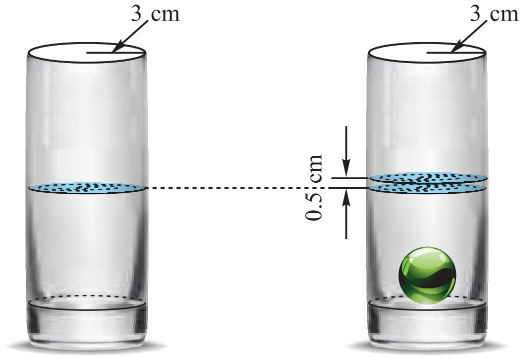


图 4.5－16

解 设玻璃球的半径为 R cm，则由题意有

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\times 3^2\times 0.5,$$

解得 $R=1.5$．

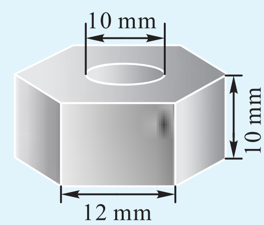
故玻璃球的半径为 1.5 cm．

在生产生活中，我们遇到的许多物体都是由简单几何体组合而成的，因而它们的表面积和体积可以利用这些简单几何体的表面积和体积来计算．

练习

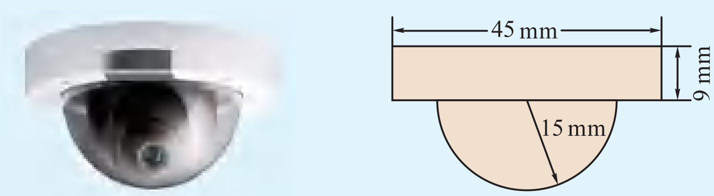
1. 在一块平地上，计划修建一条水渠，渠道长 1.5 km，渠道的横断面是梯形．已知梯形的两底分别是 1.8 m，0.8 m，高是 1.6 m，如果每个人每天挖 2 m^3，且必须在 30 天之内挖完，问至少要派多少人？

2. 如图，有一堆相同规格的六角螺帽毛坯共重 5.8 kg．已知底面六边形的边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm．问约有毛坯多少个(铁的密度是 7.8 g/cm^3)？



（第 2 题）

3. 某单位购置了一批红外半球高速自动对焦一体摄像机(如图(1)所示)，作为安防用品．在安装及做防护装置时，需要了解单个产品的体积，产品的数据指标如图(2)所示，求红外半球摄像机的体积(π 取 3.14，结果精确到 0.01 cm^3)．



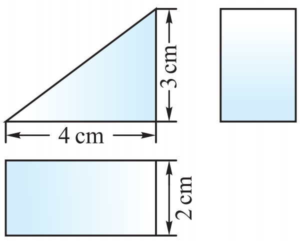
(1) (2)

（第 3 题）

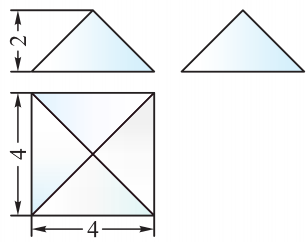
习题 4.5

学而时习之

1. 已知一个直三棱柱的三视图的有关尺寸如图所示，求这个几何体的表面积.



（第 1 题）

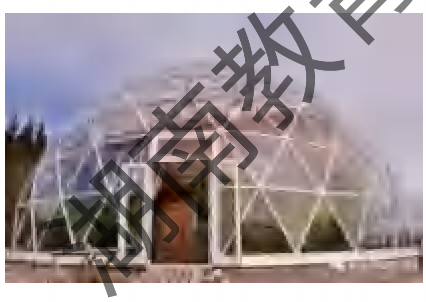


（第 2 题）

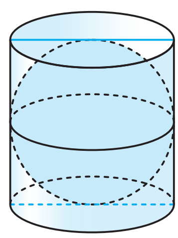
2. 已知某四棱锥的三视图如图所示，求该棱锥的侧面积.

3. 法国罗浮宫玻璃金字塔外表呈正四棱锥形状. 已知塔高 21 m，底宽 34 m，求塔身的表面积(结果精确到 0.01 m^2).

4. 图中是某建筑物上面的半球状玻璃罩，假设其直径为 10 m，试计算做这样一个玻璃罩需要多少玻璃材料(π 取 3.14，门框忽略不计).



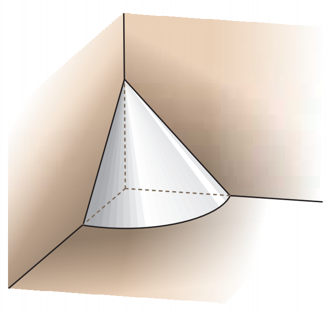
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等. 相传这个图形表达了阿基米德最引以为豪的发现：图中圆柱的体积是球体积的$\dfrac{3}{2}$，圆柱的表面积也是球表面积的$\dfrac{3}{2}$. 他的发现是否正确？试说明理由.

6.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著. 该书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺. 问：积及委米几何?”其意思是：“在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为



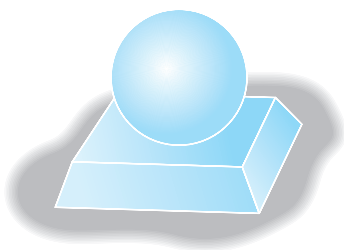
（第 6 题）

多少?”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算堆放的米约有多少斛.

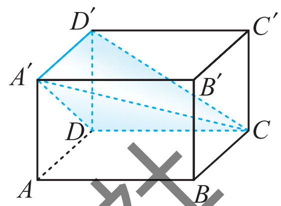
7. 如图，一个容器的盖子用一个正四棱台和一个球焊接而成. 球的半径为 R. 正四棱台的上、下底面边长分别为 $2.5R$ 和 $3R$，斜高为 $0.6R$.

(1) 求这个容器盖子的表面积(用 R 表示，焊接处对面积的影响忽略不计)；

(2) 若 $R=2$ cm，为盖子涂色时所用的涂料每 0.4 kg 可以涂 1 m^2，计算为 100 个这样的盖子涂色约需涂料多少千克(内部不涂色，π 取 3.14，结果精确到 0.1 kg).



(第 7 题)



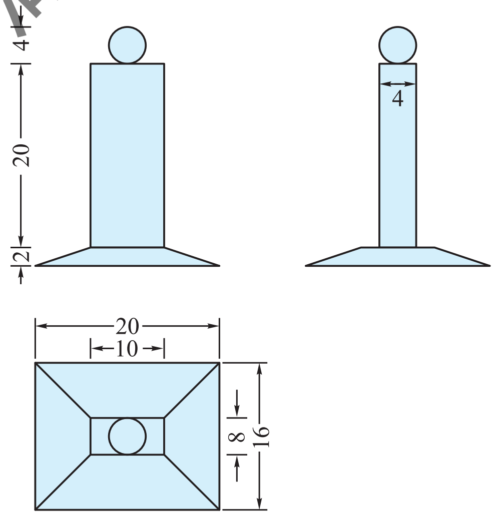
(第 8 题)

8. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，用截面截下一个棱锥 $C-A'DD'$，求棱锥 $C-A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比.

温故而知新

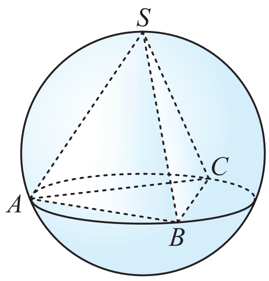
9. 一个棱台的高为 20 cm，体积为 1 720 cm^3，两底面对应边的比为 $5:8$，求这个棱台两个底面的面积.

10. 下图是一个奖杯的三视图(单位：cm)，试求出这个奖杯的体积(π 取 3.14).



(第 10 题)

11. 如图，在正四面体 $S-ABC$ 中，若侧棱 $SA=23$，求正四面体 $S-ABC$ 的外接球的表面积（π 取 3.14，结果精确到 0.01）.

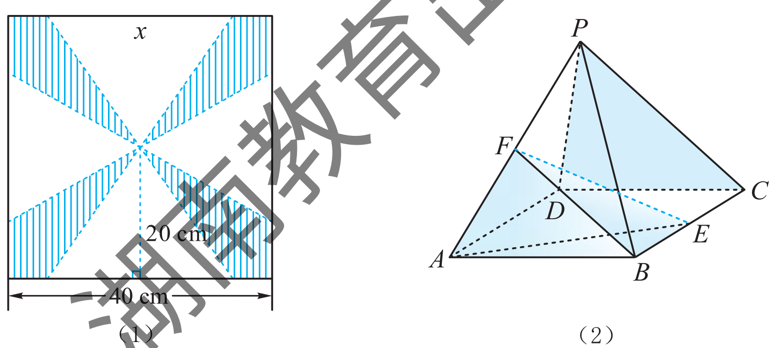


（第 11 题）

12. 一块边长 40 cm 的正方形包装纸按图(1)所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个如图(2)所示的正四棱锥形包装盒. 在图(1)中，x 表示等腰三角形的底边长；在图(2)中，点 E，F 分别是四棱锥 $P-ABCD$ 的棱 BC，PA 的中点.

(1) 求证：$EF\parallel$ 平面 PDC；

(2) 把该包装盒的体积 V 表示为 x 的函数，并求 $x=32$ cm 时，三棱锥 $A-BEF$ 的体积.



（第 12 题）

数学文化

几何学的产生和发展

几何学是研究图形的最古老的数学分支之一.

最早的文字是象形文字，是图形的抽象. 人类学会把现实的立体形象用线条刻画在平面上，这标志着文明的开始，也为几何学的产生准备了必要的基础.

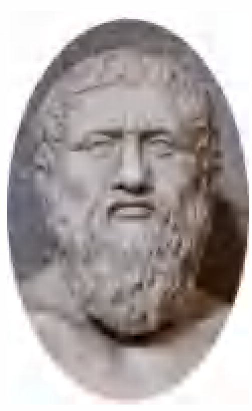
最早的几何学是经验科学. 在制作衣物器皿、建房造车修桥、土地测量计算等实践活动中，人们积累了画图和计算几何量的经验，总结出最早的一批几何知识. 据考证，古印度的几何学源于寺庙和祭坛的设计；古中国夏禹治水已用到规矩准绳，数学经典《周髀算经》记载了与天文观测有关的几何知识，例如勾股定理；更为人熟知的是，年复一年的尼罗河泛滥后重新丈量土地的需求，催生了古埃及的几何学.

古希腊数学家泰勒斯(约前 625—约前 547)，将他在古埃及学到的几何知识引入古希腊，并在整理和研究几何知识的过程中，运用演绎推理的方法，证明了一些几何定理，例如等腰三角形两底角相等、角边角对应相等的两个三角形全等. 据说，他在埃及还曾用立杆测影的几何推理方法测量过金字塔的高度.

泰勒斯

此后，古希腊学者们不仅研究几何，有些还将几何知识作为教学内容，这促进了几何知识的系统化. 这方面的代表性人物，当推毕达哥拉斯(约前 580—约前 500). 据后人记载，毕达哥拉斯学派发现并证明了勾股定理，研究过正多面体作图，发现并证明了三维空间里只有 5 种正多面体.

毕达哥拉斯学派尽管做了出色的几何研究，但他们认为“万物皆数”. 而他们心目中的数，只是正整数和分数. 有了勾股定理，容易计算出单位正方形对角线的长度为$\sqrt{2}$. 毕达哥拉斯学派发现$\sqrt{2}$不能用整数或分数表示，这颠覆了万物皆数的信仰，史称第一次数学危机.

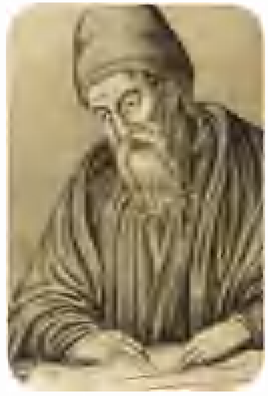


柏拉图

万物皆数观点的破灭，使古希腊的学者们相信几何才是数学的基础. 对几何问题的研究，成为他们学术活动的重要内容. 古希腊三大著名几何问题(用圆规直尺实现化圆为方、倍立方体和三等分角)的流行表明，当时的几何研究已经超出了实用的目的，上升到了理论思考的层面. 著名哲学家柏拉图(前 427—前 347)在雅典创立了学园，其大门

上写着“不懂几何者莫入”，这显示出几何在学者心目中的地位.

对几何的研究促使哲学家思考推理的规律和方法. 柏拉图主张对几何等数学知识做演绎的整理，从一些无须证明的基本事实出发推出其他结论. 他的学生亚里士多德(前 384—前 322)发展并完善了他的思想，将数学推理规律规范化、系统化，创立了逻辑学. 亚里士多德提出数学体系要从公理(所有科学共有的真理)和公设(该门学科基本原理)出发推出其他知识，这为欧几里得(约前 330—前 275)演绎几何体系奠定了方法论的基础.

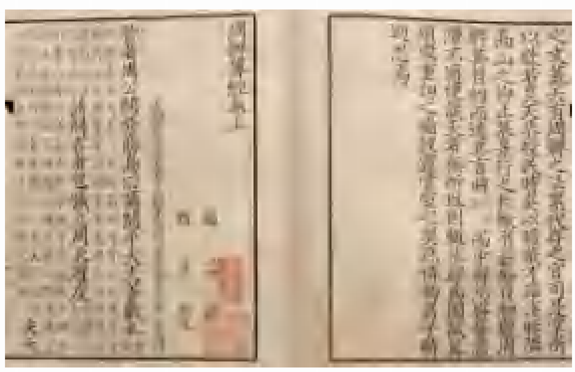


欧几里得

欧几里得是希腊论证几何学的集大成者. 他在几何领域落实了柏拉图和亚里士多德的主张，写出了垂范千古的名著《原本》(中译本书名《几何原本》，是因为最初只翻译了其中关于平面几何的 6 卷)，对当时的数学知识做了系统的理论总结. 全书 13 卷，提出 5 条公理和 5 条公设，引进 119 个定义，推出了 465 条定理. 这是人类首次建立的科学体系，被数学、物理、自然科学甚至某些人文科学的研究视为楷模. 后世很多大科学家如牛顿、爱因斯坦都受益于《原本》，著名历史文献《美国独立宣言》中，也使用了类似于《原本》的公理化方法.

在欧几里得之后，阿基米德(前 287—前 212)深入研究了面积和体积的计算问题. 他证明了球的表面积等于其大圆面积的 4 倍，球的体积等于其外切圆柱的$\frac{2}{3}$；他还求出了抛物线拱形的面积，发现了螺旋线切线的作图方法. 这些出色的成就是微积分思想的萌芽. 稍后，阿波罗尼奥斯(约前 262—约前 190)的 8 卷《圆锥曲线论》，成为古希腊数学的顶峰. 其中有些内容的深刻程度，已触及近代微分几何和射影几何的思想了.

中国古代数学更重视应用和算法. 春秋时期的哲学著作《道德经》开始说的“道可道，非常道”已有公理化思想的萌芽. 《墨经》(约公元前 4 世纪)中讨论了一些逻辑法则，并提出了一些抽象的几何概念. 但秦汉时期终止了百家争鸣的局面，数学研究也限于实用. 《九章算术》(公元前 1 世纪以前)中“方田”“商功”“勾股”这三章是讲几何的，但仅仅给出算法



周髀算经

而没有推理论证．魏晋南北朝期间学术思辨之风再起，数学上兴起论证趋势．一些学者通过为《周髀算经》《九章算术》作注释的方式来记录自己的研究成果．三国时期赵爽注《周髀算经》时，给出勾股定理简洁优美的证明；刘徽（3 世纪）于公元 263 年撰写《九章算术注》，创造了割圆术和体积计算的极限方法；祖冲之（429—500）接着将圆周率算到小数点后 7 位，并提出密率 $\frac{355}{113}$；祖暅（5—6 世纪，祖冲之之子）在计算体积时明确提出并成功运用的基本原理，和近代用积分法计算体积是一致的．

几何学进一步的发展，有三个主要的方面——几何量的计算、几何公理系统的探究以及几何命题的判定算法．

几何量计算的研究，导致三角学的诞生以及微积分学的创建，形成了近现代数学的一些重要分支．

几何公理系统的探究，针对欧几里得《原本》中“第五公设”的去留问题，持续了两千年之久，最后导致非欧几何的发现，实现了数学思想大变革．德国数学家希尔伯特（1862—1943）在其所著的《几何基础》中提出了更完善的几何公理体系，以及有关数学公理的一般理论．

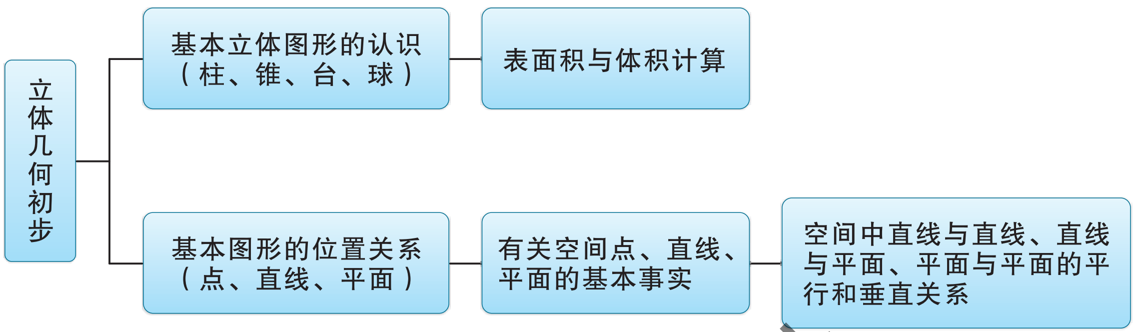
在几何命题判定算法的探索中，也就是几何定理通用证明方法的寻求中，笛卡儿（1596—1650）引进了坐标系，创建了解析几何．计算机的出现促进了这方面的研究．波兰数学家塔斯基（1901—1983）给出了初等几何与初等代数命题的判定算法，但计算繁复难以在计算机上实现．20 世纪 70—90 年代，以吴文俊（1919—2017）为代表的中国数学家们，在这方面获得成功，为初等几何书写出精彩的一章．


吴文俊

几何，是数学思想的摇篮．微分几何、代数几何、距离几何、积分几何、凸几何、组合几何等众多的新的几何分支，在现代数学大家庭里依然生机勃勃，为人类文明增辉．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 空间几何体是现实世界中物体的抽象，试描述柱、锥、台、球这几类简单几何体的基本特征. 通常画空间图形的基本要求是什么？试归纳用斜二测画法画直观图的一般规则，并结合一些几何体画出它们的直观图.

2. 空间几何体由点、线、面构成，空间中的直线和平面都可以看作点的集合. 尝试用集合的语言来描述三者之间的关系，并结合三者的位置关系用集合语言表述出来.

3. 平面是最基本的几何概念之一. 刻画平面的三条基本事实是立体几何公理体系的基石，是几何推理的基本依据.

4. 研究基本图形的位置关系是本章的重点. 试以长方体模型为例，描述线与线、线与面、面与面平行和垂直的关系，用数学语言描述有关平行、垂直的性质与判定. 结合一些空间图形问题，体会如何实现平行关系之间的转化、垂直关系之间的转化.

5. 柱体、锥体、台体的侧面积计算公式之间有何联系？它们的体积计算公式之间有何联系？试运用本章所学的几类表面积和体积公式解决一些简单的实际问题.

复习题四

学而时习之

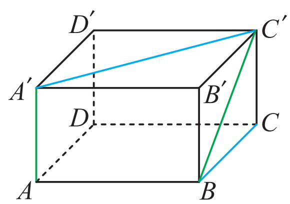
1. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线，使它们成为

（1）平行直线；　（2）相交直线；　（3）异面直线.

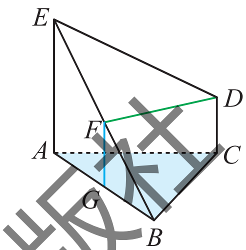
2. 如图，已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{3}$，$AA'=2$.

（1）BC 和 $A'C'$ 所成的角是多少度？

（2）AA' 和 BC' 所成的角是多少度？



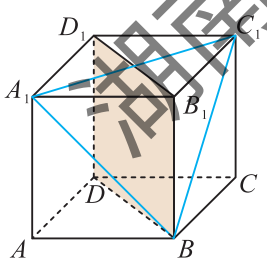
（第 2 题）



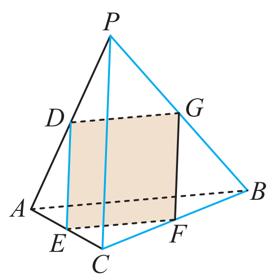
（第 3 题）

3. 如图，EA 和 DC 都垂直于平面 ABC，$DC=\frac{1}{2}EA$，F，G 分别是 EB 和 AB 的中点. 求证：（1）$FG\perp$平面 ABC；（2）$FD/\!/$平面 ABC.

4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，判断平面 A_1C_1B 与平面 BB_1D_1D 是否垂直，并说明你的理由.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在四面体 $P-ABC$ 中，$PC\perp AB$，点 D，E，F，G 分别是棱 AP，AC，BC，PB 的中点. 求证：

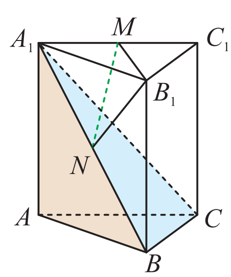
（1）$DE/\!/$平面 BCP；

（2）四边形 $DEFG$ 为矩形.

6. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 ABC，$BC\perp AB$，点 M，N 分别是线段 A_1C_1，A_1B 的中点.

（1）求证：平面 $A_1BC\perp$平面 A_1AB.

（2）设平面 MNB_1 与平面 BCC_1B_1 的交线为 l，求证：$MN/\!/l$.

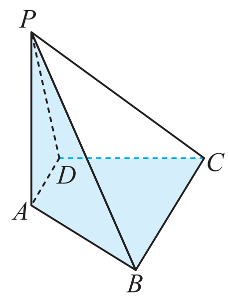


（第 6 题）

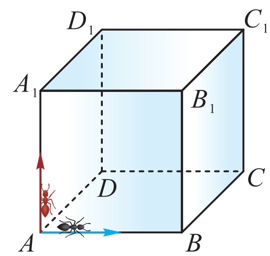
7. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AD//BC$，$\angle BCD=90^\circ$，且$PA\perp AB$，$PD\perp CD$.

（1）判断 CD 是否与平面 PAD 垂直，并证明你的结论；

（2）求证：平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$.



（第 7 题）

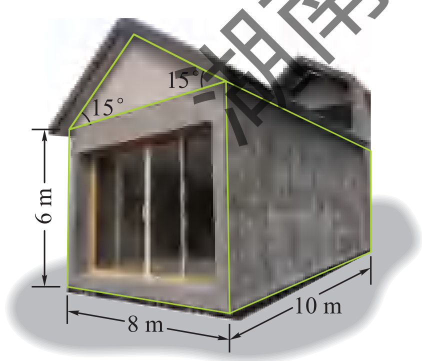


（第 8 题）

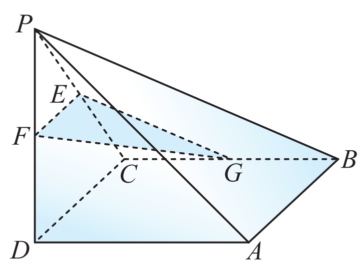
8. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体，红、黑两只蚂蚁从点 A 出发沿棱向前爬行，每走完一条棱称为"走完一段"，红蚂蚁的爬行路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots$，黑蚂蚁的爬行路线是 $AB\to BB_1\to\cdots$，它们都依照如下规则：所爬行的第$(n+2)$段与第 n 段所在直线必须是异面直线. 设红、黑两只蚂蚁都走完 2 005 段后各停止在正方体的某个顶点处，这时红、黑两只蚂蚁的距离是多少？

9. α，β 是两个不同的平面，m，n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，给出四个论断：①$m\perp n$，②$\alpha\perp\beta$，③$n\perp\beta$，④$m\perp\alpha$. 以其中三个论断作为条件，余下一个作为结论，写出你认为正确的一个命题：____________.

10. 我国已出现了用 3D 打印技术打印出来的房子，其耗时只有几个小时，其中有一尺寸如图所示的房子. 不计屋檐，求其表面积和体积.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD=AB=2$，E，F，G 分别为 PC，PD，BC 的中点. 求：

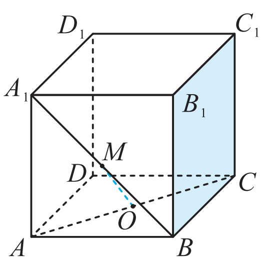
（1）四棱锥 $E-ABCD$ 的体积；

（2）三棱锥 $P-EFG$ 的体积.

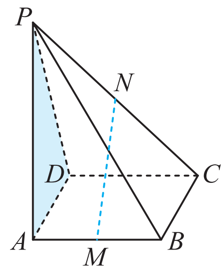
12. 一个几何体共有六个侧面且都是全等的等腰梯形，等腰梯形的上底长为 9 cm，下底长为 15 cm，腰为 5 cm，上、下底面都是正六边形，求该几何体的全面积.

温故而知新

13. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，O 分别是 A_1B，AC 的中点．求证：OM∥平面 BB_1C_1C.



（第 13 题）



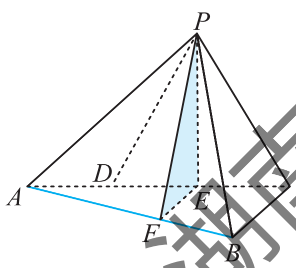
（第 14 题）

14. 如图，已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 AB，PC 的中点.

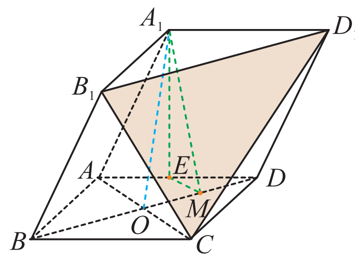
（1）求证：MN∥平面 PAD.

（2）在棱 PB 上确定一点 Q，使平面 MNQ∥平面 PAD.

15. 如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$平面 ABC，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，点 D，E 在线段 AC 上，且 $AD=DE=EC=2$，$PD=PC=4$，点 F 在线段 AB 上，且 EF∥CB．求证：$AB\perp$平面 PFE.



（第 15 题）



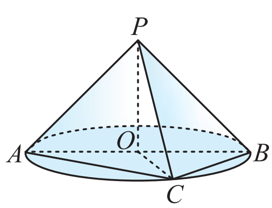
（第 16 题）

16. 由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到如图所示的几何体，四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$平面 $ABCD$.

（1）求证：A_1O∥平面 B_1CD_1；

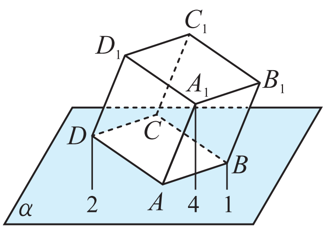
（2）设 M 是 OD 的中点，求证：平面 $A_1EM\perp$平面 B_1CD_1.

17. 如图，AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上异于 A，B 的点，PO 垂直于圆 O 所在的平面，且 $PO=OB=1$．求三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值.

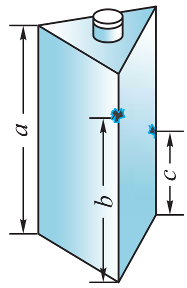


（第 17 题）

18. 多面体上，位于同一条棱两端的顶点称为相邻的顶点. 如图所示，正方体的一个顶点 A 在平面 α 内，其余顶点在 α 的同侧. 正方体上与顶点 A 相邻的三个顶点到 α 的距离分别为 1，2 和 4. P 是正方体的其余四个顶点中的一个，求点 P 到平面 α 的距离的可能值.



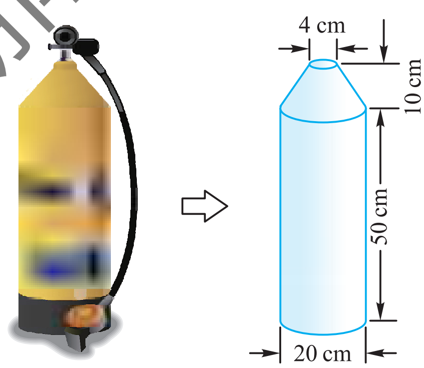
（第 18 题）



（第 19 题）

19. 某人买了一罐容积为 V L，高为 a m 的直三棱柱形罐装进口液体车油，由于不小心摔落地上，结果有两处破损并发生渗漏，它们的位置分别在两条棱上且距下底面高度分别为 b m，c m 的地方(如图). 为了减少罐内液体车油的损失，该人采用破口朝上，倾斜罐口的方式拿回家. 试问罐内液体车油最多还能剩多少?

20. 某型号氧气瓶形状如图所示，可看作是由一个圆柱和一个圆台组合而成(设氧气瓶中氧气已充满，图中所给尺寸是氧气瓶的内径尺寸). 某潜水员身背该型号氧气瓶潜入水深 a m 的湖底进行某项工作，其匀速下潜和上浮的速度均为 v m/min. 该潜水员下潜时每分钟耗氧量与其下潜速度的平方成正比，经测验，当其下潜速度为 1 m/min 时，每分钟耗氧 0.2 L；在湖底工作时，每分钟耗氧 0.4 L；上浮时，每分钟耗氧 0.2 L. 若下潜与上浮时，他的速度均不能超过 p m/min，试问：该潜水员在湖底最多能工作多长时间(π 取 3.14，氧气瓶体积计算精确到 1 L，a，p 为常数)?

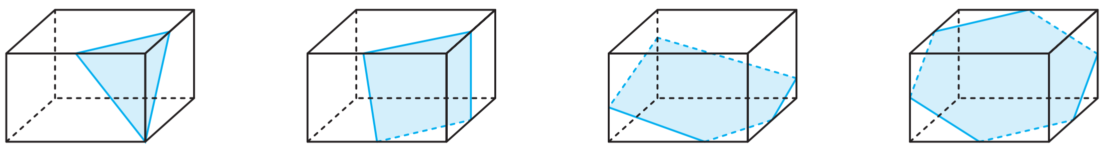


（第 20 题）

上下而求索

21. *（数学探究活动）* 用一个平面去截长方体，截面的形状将会是什么样的？

若想看到截面的样子，可以用一个长方体的盒子，内装一定量的液体，以不同的方向角度倾斜．观察液体表面的变化，我们看到：液面可以是三角形、四边形、五边形或六边形．观察并思考下列问题：



（第 21 题）

（1）液面不会是七边形，为什么？

（2）当液面是三角形时，一定是锐角三角形，为什么？

（3）当液面是四边形时，这个四边形有什么特点？

（4）设长方体有公共顶点的三条棱长分别为 a，b，$c(a<b<c)$，液面会是正方形吗？

（5）液面不会是正五边形，为什么？

（6）在什么条件下，液面呈正六边形？

（7）当液面是三角形时，液体体积与长方体体积之比的范围是多少？

（8）当液面是六边形时，液体体积与长方体体积之比的范围是多少？

22. （1）已知 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面上的一点，则有 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$，试证明该命题；

（2）将上述命题推广到 P 为空间上任一点的情形，写出这个推广后的命题并加以证明；

（3）将矩形 $ABCD$ 进一步推广到长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，并利用(2)得到的命题建立并证明一个新命题．

第5章

5 概　　率

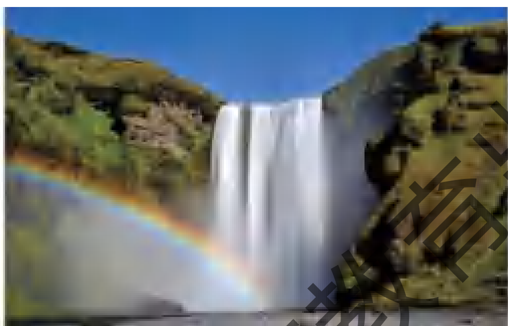
现实世界除了有确定性现象外，还有许多随机现象，人们经过长期的研究和探索，引入了概率的概念，它是研究复杂随机现象规律的重要数学工具.

本章我们将学习如何刻画随机现象、随机事件，通过古典概型进一步理解随机事件发生的含义，学习如何度量简单随机事件发生的可能性的大小，并通过解决一些简单实际问题来加深对随机现象及其规律的认识和理解.

5.1 随机事件与样本空间

5.1.1 随机事件

在自然界和人们的生产实践活动中，经常遇到各种各样的现象，这些现象大致可分为两类，一类是确定的，如“地球围绕太阳转”“水从高处往低处流”“同性电荷必然相斥”等等，这种在一定条件下必然发生(出现)的现象称为**确定性现象**.



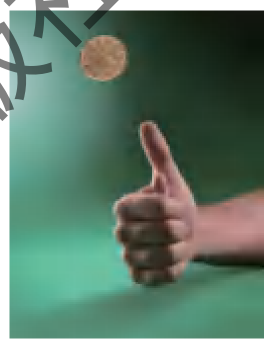


图 5.1－1

在自然现象和社会现象中，还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象. 例如，向上抛掷一枚硬币，事先无法确定它掉下来之后是“正面朝上”还是“反面朝上”；又如，司机驾驶汽车经过装有交通信号灯的路口前，也无法事先确定是碰到红灯、绿灯还是黄灯. 这些现象的特点是：在条件相同的情况下，不同次的试验或观察会得到不同的结果，每一次试验或观察之前不能确定会出现哪种结果. 我们把这种现象称为**随机现象**.

对随机现象进行试验、观察或观测称为**随机试验**. 随机试验一般用大写字母 E 表示.

对于一个随机试验，我们将该试验的每个可能结果称为**样本点**，常用 ω(或带下标)表示. 如抛掷一枚硬币时，其样本点可记为 ω_1＝“正面朝上”，ω_2＝“反面朝上”.

将随机试验所有样本点构成的集合称为此试验的**样本空间**，用 Ω 表示. 如抛掷一枚硬币时，其样本空间 Ω＝{正面朝上，反面朝上}＝{ω_1，ω_2}.

用集合的语言描述时，试验的样本空间是该试验所有样本点构成的全集，样本点是该全集的元素. 它们之间的关系可用图 5.1－2 刻画.

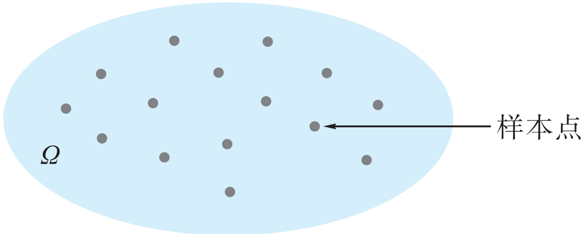


图 5.1－2

如果样本空间中样本点的个数是有限的，则称该样本空间为**有限样本空间**.

例 1 抛掷一枚骰子，用 1，2，3，4，5，6 表示掷出的点数，写出试验的样本点和样本空间.

解 试验一共有 6 个样本点，它们是 1，2，3，4，5，6. 因此，该试验的样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 2 抛掷两枚硬币，用 H 表示正面朝上，用 T 表示反面朝上，写出试验的样本点和样本空间.

解 将第一枚硬币视为硬币 1，第二枚硬币视为硬币 2，则试验有 4 个样本点，它们分别是

HH：硬币 1 正面朝上，硬币 2 正面朝上；

HT：硬币 1 正面朝上，硬币 2 反面朝上；

TH：硬币 1 反面朝上，硬币 2 正面朝上；

TT：硬币 1 反面朝上，硬币 2 反面朝上.

因此，样本空间 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$.

> 这里 HT 和 TH 是相同的样本点吗?

我们已经知道抛掷一枚骰子，其样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 若用 $A=\{3\}$表示掷出 3 点，则 A 是 Ω 的子集. 若用 $B=\{2, 4, 6\}$表示掷出偶数点，则 B 也是 Ω 的子集.

类似地，对抛掷两枚硬币这一随机试验，若用 $A=\{HH\}$表示硬币 1 正面朝上，硬币 2 正面朝上，则 A 是 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$的子集.

一般地，当 Ω 是试验的样本空间时，我们称 Ω 的子集 A 是 Ω 的**随机事件**，简称为**事件**，一般用大写字母 A，B，C，…来表示. 对于样本空间 Ω，A 是事件和 $A\subseteq\Omega$ 等价. 由一个样本点组成的集合，称为**基本事件**.

当试验结果(即试验的样本点)$\omega\in A$ 时，就称事件 A 发生，否则称 A 不发生.

> 样本点 $\omega\in A$ 和事件 A 发生等价.

在抛掷骰子试验中，当掷出的点数是 3 时，我们就称事件

$A=\{3\}$发生，否则称事件 A 不发生. 同样，当掷出的点数是偶数时，则称事件 $B=\{2, 4, 6\}$发生，否则称事件 B 不发生.

Ω 也是 Ω 的子集，并且包括了所有的样本点，所以必然发生. 我们称样本空间 Ω 是**必然事件**. 例如，抛掷一枚骰子，“出现的点数不超过 6”为必然事件.

空集$\varnothing$也是 Ω 的子集，所以空集$\varnothing$是事件. 空集$\varnothing$中没有样本点，永远不会发生，所以我们称$\varnothing$是**不可能事件**. 例如，抛掷一枚骰子，“出现的点数超过 6”为不可能事件.

练习

1. 在 0，1，2，…，9 这 10 个数字中任意选取一个，写出试验的样本点和样本空间.

2. 从 0，1，2 这 3 个数字中，不放回地取两次，每次取一个，构成数对(x, y)，x 为第一次取到的数字，y 为第二次取到的数字.

(1) 写出这个试验的样本空间；

(2) 求出这个试验基本事件的总数；

(3) 写出“第一次取出的数字是 2”这一事件.

5.1.2 事件的运算

由于事件被定义为样本空间的子集，于是我们可以用集合的语言来描述事件间的关系与运算.

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即事件 A 中的每个样本点都在 B 中，则称 A **包含于** B，或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$.

显然，对任何事件 A，都有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

对于事件 A，B，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 等价，或称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 等价的事件是同一个事件，只是有时表达不同. 例如，抛掷一枚骰子，观察掷出的点数，则事件 $A=\{2, 4, 6\}$与事件 $B=$“掷出偶数点”等价.

如果某事件发生当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生，则称该事件为**事件 A 与 B 的交**(或**积**)，记作 $A\cap B$(或 AB). 事件 $A\cap B$ 由属于事件 A 且属于事件 B 的所有样本点组成. 显然有 $\Omega\cap A=A$.

如果某事件发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生，则称该事件为**事件 A 与 B 的并**(或**和**)，记作 $A\cup B$(或 $A+B$). 事件 $A\cup B$ 由至少属于事件 A 或 B 之一的样本

点组成．容易得$\varnothing \cup A=A$．

例如，在抛掷一枚骰子的试验中，若事件$A=\{2, 4, 6\}$，事件$B=\{1, 2, 3\}$，则事件$A\cap B=\{2\}$，事件$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$．

如果事件$A\cap B$为不可能事件，即$A\cap B=\varnothing$，则称事件A，B**互斥**（或**互不相容**）．

例如，抛掷一枚骰子，若用$A=\{1, 3, 5\}$表示掷出奇数点，用$B=\{2, 4, 6\}$表示掷出偶数点，则事件A，B为互斥事件．

一般地，如果事件A_1，A_2，…，A_n中任意两个都互斥，则称它们**两两互斥**．

如果某事件发生当且仅当事件A发生而事件B不发生，则称该事件为**事件A与B的差**，记作$A\backslash B$．显然，$A\backslash B$由属于事件A但不属于事件B的样本点组成．

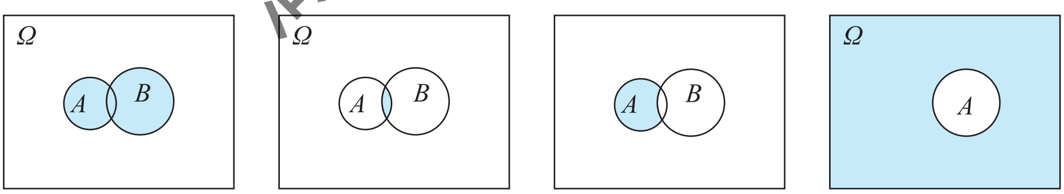
例如，抛掷一枚骰子，若事件$A=\{2, 4, 6\}$，事件$B=\{1, 2, 3\}$，则事件$A\backslash B=\{4, 6\}$．

如果某事件发生当且仅当事件A不发生，则称该事件为A的**对立事件**，记作$\Omega\backslash A$或$\overline{A}$．

例如，在抛掷一枚骰子的试验中，若事件$A=\{2, 3, 4\}$，则事件$\overline{A}=\{1, 5, 6\}$．显然，若事件A发生，则事件$\overline{A}$不发生，反之亦然．

由对立事件的定义可得$\Omega=A\cup\overline{A}$．

我们可以用下列韦恩图（图 5.1－3）中的阴影部分分别表示事件$A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$，$\overline{A}$．



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A\backslash B$　　$\overline{A}$

图 5.1－3

概率论中事件的运算性质与集合论中的运算性质是一致的，主要包括：

（1）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)$；

（4）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

例 3 抛掷两枚骰子，一枚是红色的，一枚是蓝色的．设 A=“红骰子的点数是 2”，B=“蓝骰子的点数是 3”．

（1）写出样本空间 Ω，并用样本点表示事件 A，B；

（2）计算 $A\cap B$；

（3）计算 $A\cup B$.

解　（1）用(i,j)表示红骰子的点数是 i，蓝骰子的点数是 j，则试验的样本空间是

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}.$$

根据事件的定义，得到

$A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$，

$B=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$.

（2）$A\cap B=\{(2,3)\}$=“红骰子是 2 点，蓝骰子是 3 点”.

（3）$A\cup B=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$=“红骰子是 2 点或蓝骰子是 3 点”.

例 4 文具盒中有圆珠笔 3 支，钢笔 2 支，从中无放回地任取 3 支.

（1）用集合 A 表示事件“3 支都是圆珠笔”；

（2）用集合 B 表示事件“恰有 2 支是圆珠笔”；

（3）用集合 C 表示事件“恰有 1 支是圆珠笔”；

（4）用 A，B，C 表示 Ω；

（5）解释事件 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$，$\Omega\setminus A$ 的含义.

解　将 3 支圆珠笔分别编号 1，2，3，将 2 支钢笔分别编号 1，2．用 y_i 和 g_j 分别表示取出的是 i 号圆珠笔和 j 号钢笔，则 $y_1y_2y_3$ 表示取出的是 1 号，2 号和 3 号圆珠笔，$y_1y_2g_1$ 表示取出的是 1 号，2 号圆珠笔和 1 号钢笔……

按照事件的定义，可得

（1）$A=\{y_1y_2y_3\}$.

（2）$B=\{y_1y_2g_1,\ y_1y_2g_2,\ y_1y_3g_1,\ y_1y_3g_2,\ y_2y_3g_1,\ y_2y_3g_2\}$.

（3）$C=\{y_1g_1g_2,\ y_2g_1g_2,\ y_3g_1g_2\}$.

（4）因为必有事件 A，B，C 之一发生，所以样本空间 $\Omega=A\cup B\cup C$.

（5）由事件 A，B 的定义可知，$A\cup B$=“至少有 2 支圆珠笔”，$A\cap B=\varnothing$，是不可能事件，$A\setminus B=A$=“3 支都是圆珠笔”，$\Omega\setminus A$=“至少有 1 支钢笔”.

练习

1. 将红、白两个球任意放入Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个盒中(一个盒中只能容纳一个球)．用 A_1，A_2，A_3 分别表示事件“红球在Ⅰ盒中”“红球在Ⅱ盒中”“红球在Ⅲ盒中”；用 B_1，B_2，B_3 分别表示事件“白球在Ⅰ盒中”“白球在Ⅱ盒中”“白球在Ⅲ盒中”．

用语言叙述下列事件：

(1) $A_1 \cup B_1$；　(2) $A_2 \cap B_2$；　(3) $A_3 \setminus B_3$；

(4) $\overline{B_2}$；　(5) $A_1 \cap \overline{B_2}$．

2. 抛掷一枚骰子，观察掷出的点数，若事件 $A=\{1, 3, 5\}$，事件 $B=\{2, 3\}$，求事件 $A \cup B$，$A \cap B$．

3. 从 40 张扑克牌(红桃、黑桃、方块、梅花点数为 1～10)中，任取一张，判断下列给出的每对事件，是否为互斥事件，是否为对立事件，并说明理由．

(1)“抽出红桃”与“抽出黑桃”；

(2)“抽出红色牌”与“抽出黑色牌”；

(3)“抽出的牌的点数为 5 的倍数”与“抽出的牌的点数大于 9”．

习题 5.1

学而时习之

1. 口袋中有标号 1～3 的同样小球各 1 个，写出下列试验的样本空间：

(1) 从中任取 1 个；

(2) 从中一次随机地取出 2 个．

2. 抛掷一枚骰子和一枚硬币，写出样本空间．

3. 同时抛掷一枚骰子和一枚硬币，写出下列事件：

(1) 硬币是正面，骰子的点数是奇数；

(2) 硬币是正面，骰子的点数是偶数；

(3) 硬币是正面；

(4) 骰子的点数是 5．

4. 某小组由 5 名学生组成，其中 3 名男生，2 名女生．现从中任选 2 名学生参加演讲比赛．判断下列每对事件是否为互斥事件，若是，再判断它们是否为对立事件．

(1) 恰有 1 名男生与恰有 2 名男生；

(2) 至少有 1 名男生与全是男生；

(3) 至少有 1 名男生与全是女生；

(4) 至少有 1 名男生与至少有 1 名女生.

5. 抛掷 4 枚硬币，观察结果.

(1) 用集合 A 表示事件“至少 1 枚反面朝上”；

(2) 用集合 B 表示事件“至少 2 枚反面朝上”；

(3) 用集合 C 表示事件“恰好 2 枚反面朝上”；

(4) 计算 $A\cap C$，$\Omega\backslash A$，并解释含义.

6. 盒中有标号 1～3 的同样白球各 1 个，标号 1～2 的同样黑球各 1 个. 从中倒出 3 个，观察结果，写出样本空间.

(1) 用集合 A 表示事件“3 个都是白球”；

(2) 用集合 B 表示事件“至少 2 个白球”；

(3) 用集合 C 表示事件“至少 1 个白球”；

(4) 计算 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$，$C\backslash B$，并解释它们的含义.

温故而知新

7. 设 M，N 是两个随机事件，若 M，N 为互斥事件，则下列说法正确吗？试说明理由.

(1) $M\cup N$ 是必然事件；

(2) $\overline{M}\cup\overline{N}$ 是必然事件；

(3) $\overline{M}$ 与 $\overline{N}$ 一定为互斥事件；

(4) $\overline{M}$ 与 $\overline{N}$ 一定不为互斥事件.

8. 甲、乙两人玩一个游戏，每次各出 1～5 根手指，若和为偶数算甲赢，否则算乙赢.

(1) 现连玩三次，若以 B 表示甲至少赢一次的事件，C 表示乙至少赢两次的事件，试问：B 与 C 是否为互斥事件？为什么？

(2) 这个游戏规则公平吗？试说明理由.

5.2 概率及运算

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有随机性．但我们容易发现，在同一个试验中，有的事件发生的可能性大，有的事件发生的可能性小．我们把随机事件 A 发生的可能性的大小叫作**随机事件 A 的概率**，记作 $P(A)$．它是事件本身固有的属性．

下面，我们从一类简单的概率模型入手，来研究怎样从数量上描述事件的概率以及学习概率的运算法则．

5.2.1 古典概型

先来看几个例子．

● 抛掷一枚质地均匀的硬币，用 H 表示正面朝上，用 T 表示反面朝上，则样本空间 $\Omega=\{H, T\}$ 中有两个样本点，而事件 $A=\{H\}$，$B=\{T\}$ 各有一个样本点．

根据已有的概率知识，得

$$P(A)=\frac{1}{2}=\frac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}},\quad P(B)=\frac{1}{2}=\frac{B\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}.$$

● 抛掷一枚质地均匀的骰子，样本空间是

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

其样本点的个数是 6；用 $A=\{3\}$ 表示掷出的点数是 3，其样本点的个数是 1；用 $B=\{2, 4, 6\}$ 表示掷出偶数点，其样本点的个数是 3．

根据已有的概率知识，有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{B\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}=\frac{1}{2}.$$

从以上例子引出概率的如下定义：

设试验的样本空间 Ω 有 n 个样本点，且每个样本点发生的可能性相同．当 Ω 中的事件 A 包含了 m 个样本点时，称

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的概率，简称为 A 的**概率**．

我们把上述定义描述的概率模型称为古典概率模型，简称为**古典概型**．

古典概型具有以下特点：

（1）样本空间中只有有限个样本点；

（2）每个样本点出现的可能性相等.

对于古典概型，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}.$$

例 1 同时抛掷两枚质地均匀的硬币，求事件 $A=$“一枚正面朝上，另一枚反面朝上”的概率.

解 用 H 表示正面朝上，用 T 表示反面朝上，则试验的结果如图 5.2－1 所示.

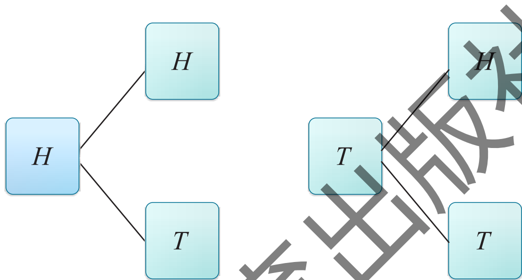


图 5.2－1

因此，试验的样本空间 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$，事件 $A=\{HT, TH\}$. 由古典概型的概率计算公式可得 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

例 2 同时抛掷两枚质地均匀的骰子，一枚是红色的，一枚是蓝色的. 计算以下事件的概率：

（1）$A=$“两枚骰子的点数相同”；（2）$B=$“两枚骰子的点数之和为 6”.

解 同时抛掷两枚骰子出现的情况如下表所示：

蓝色骰子 / 红色骰子	1	2	3	4	5	6
1	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)
2	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)
3	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)
4	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)
5	(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)
6	(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)

从表中可以看出，同时抛掷两枚骰子的结果共有 36 种，即样本空间 Ω 中样本点个数为 36.

（1）在上述 36 种结果中，两枚骰子点数相同的结果有(1，1)，(2，2)，(3，3)，(4，4)，(5，5)，(6，6)共 6 种，即事件 A 中样本点个数为 6.

由于所有 36 种结果都是等可能的，

因此 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

（2）在 Ω 中，两枚骰子点数之和为 6 的结果有(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1)共 5 种，即事件 B 中样本点个数为 5.

由于所有 36 种结果都是等可能的，

因此 $P(B)=\frac{5}{36}$.

由于事件 A 中的样本点个数总是小于或等于样本空间 Ω 中的样本点个数，因而根据古典概型的定义，可知任何事件的概率在 0～1 之间，即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \quad ①$$

必然事件包含 Ω 中的所有样本点，因而

$$P(\Omega)=1. \quad ②$$

不可能事件不包含任何样本点，因而

$$P(\varnothing)=0. \quad ③$$

我们将①②③统称为概率的基本性质.

练习

1. 一张方桌旁有四个座位，A 先坐在如图所示的座位上，B，C，D 三人随机坐到其他三个座位上，求 A 与 B 不相邻而坐的概率.

（第 1 题）

2. 同时抛掷三枚质地均匀的硬币，计算以下事件的概率：

（1）至少一枚反面朝上；

（2）至少两枚反面朝上；

（3）恰好两枚反面朝上.

3. 有 20 张卡片，第 k 张卡片上标有数 k，$k+1$，其中 $k=1$，2，…，20. 从这 20 张卡片中任取一张，记事件“该卡片上两个数的各位数字之和(例如：若取到一张卡片标有 16，17，则卡片上两个数的各位数字之和为 $1+6+1+7=15$)大于 13”为 A，求 $P(A)$.

5.2.2 概率的运算

事件作为集合经过并、交、差和补的运算后得到的结果还是事件，于是可以计算经过运算后的事件的概率.

首先我们来学习两个互斥事件的概率加法公式.

如图 5.2-2，将仅颜色不同而大小质地相同的 7 个红球、2 个绿球、1 个黄球放入一个盒子中. 现从中任取一球，记事件 A=“取出一个球是红球”，事件 B=“取出一个球是绿球”，事件 C=“取出一个球是红球或绿球”.

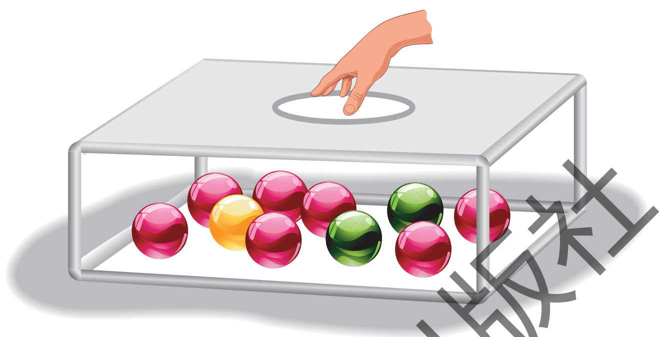


图 5.2-2

由前面的知识可知，事件 A，B 互斥，且事件 $C=A\cup B$.

由于样本空间 Ω 有 10 个样本点，A 和 B 分别有 7 个样本点和 2 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{7}{10},\ P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

由于 $A\cup B$ 也是事件，含有 9 个样本点，所以

$$P(A\cup B)=\frac{9}{10}=\frac{7}{10}+\frac{1}{5}=P(A)+P(B).$$

由此可以猜测，对于两个互斥事件，有如下**概率加法公式**：

> **如果 Ω 中的事件 A，B 互斥，则**
> $$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

下面，我们来证明上述公式.

设 Ω 有 n 个样本点，A 有 $m(m\leqslant n)$ 个样本点，B 有 $k(k\leqslant n-m)$ 个样本点，则

$$P(A)=\frac{m}{n},\ P(B)=\frac{k}{n}.$$

由于 A，B 互斥，所以

$A\cup B$ 中样本点个数 $=A$ 中样本点个数 $+B$ 中样本点个数 $=m+k$.

于是得到

$$P(A\cup B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

我们把概率加法公式反映的性质称为概率的**可加性**，可加的前提是两个事件互斥.

我们还可以将两个互斥事件的概率加法公式进行推广.

如果事件 A_1，A_2，A_3，…，A_n两两互斥，那么事件 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$发生（是指 A_1，A_2，A_3，…，A_n中至少有一个发生）的概率，等于这 n 个事件的概率的和，即

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

对于对立事件 A 与$\overline{A}$，从集合的角度看，由事件$\overline{A}$所含样本点组成的集合是全集 Ω 中的事件 A 所含样本点组成的集合的补集. 因此，对于对立事件，其概率之间有如下关系：

如果 A 是样本空间 Ω 的事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

思考这个公式是如何得出的，并尝试进行证明.

例 3 若从一副 52 张扑克牌（不含大小王）中随机抽取一张，则事件 A=“取到红桃”的概率为$\frac{1}{4}$，事件 B=“取到方块”的概率为$\frac{1}{4}$，试求：

（1）事件 C=“取到红色牌”的概率；

（2）事件 D=“取到黑色牌”的概率.

分析 一副扑克牌由红色牌与黑色牌组成，其中红色牌包括“红桃”与“方块”. 易知事件 A 与事件 B 互斥，且事件 $C=A\cup B$，因而可用互斥事件的概率加法公式求得事件 C 的概率. 而事件 D 与事件 C 是对立事件，因此可运用对立事件的概率间关系式求得 $P(D)$.

解 （1）由于事件 A，B 互斥，且事件 $C=A\cup B$，

因此 $P(C)=P(A\cup B)$

$=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

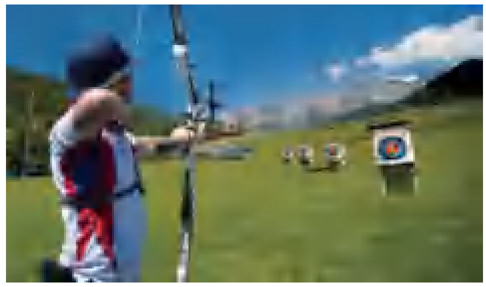
（2）由于事件 D 与事件 C 是对立事件，

因此 $P(D)=1-P(C)$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

本例表明，在求某些较复杂事件的概率时，可将所求事件的概率化为一组互斥事件的概率的和，也可求此事件的对立事件的概率.

例 4 某射箭运动员在一次射箭中命中 9 环的概率是 0.28，命中 8 环的概率是 0.19，不够 8 环的概率是 0.29，计算这名射箭运动员在一次射箭中命中 9 环或 10 环(最高环数)的概率.



解 将该射箭运动员在一次射箭中“命中 10 环或 9 环”记为事件 A，将其“命中 10 环”“命中 9 环”“命中 8 环”“命中不够 8 环”分别记为事件 B，C，D，E，则 $P(C)=0.28$，$P(D)=0.19$，$P(E)=0.29$.

因为事件 C，D，E 彼此互斥，

所以

$$\begin{aligned}P(C\cup D\cup E)&=P(C)+P(D)+P(E)\\&=0.28+0.19+0.29\\&=0.76.\end{aligned}$$

又因为事件 B 与事件 $C\cup D\cup E$ 为对立事件，故

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(C\cup D\cup E)\\&=1-0.76\\&=0.24.\end{aligned}$$

而事件 B 与事件 C 互斥，且 $A=B\cup C$.

因此

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B\cup C)\\&=P(B)+P(C)\\&=0.24+0.28\\&=0.52.\end{aligned}$$

故这名射箭运动员在一次射箭中命中 9 环或 10 环的概率为 0.52.

练习

1. 抛掷两枚质地均匀的骰子，一枚红色，一枚蓝色. 事件 A=“两枚骰子的点数相同”，事件 B=“红骰子的点数小于蓝骰子的点数”，事件 C=“两枚骰子的点数之和是 6”. 分别计算事件 $A\cup B$，$A\cup C$，$C\backslash B$ 的概率.

2. 某射手在一次射击中命中 10 环、9 环、8 环、7 环、7 环以下的概率分别为 0.24，0.28，0.19，0.16，0.13. 计算这个射手在一次射击中：

(1) 命中 10 环或 9 环的概率；

(2) 至少命中 7 环的概率；

(3) 命中环数不足 8 环的概率.

我们已经知道，若Ω中的事件A，B互斥，则有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．如果Ω中的事件A，B不互斥，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$仍然成立吗？怎样求它们的和的概率呢？

先看一个具体实例．

同时抛掷两枚质地均匀的骰子，其中一枚为红色，一枚为蓝色．记事件$A=$“红骰子点数等于6”，事件$B=$“蓝骰子点数等于6”．下面计算事件$A\cup B=$“至少有一枚骰子点数等于6”的概率．

用$(i，j)$表示红骰子的点数是i，蓝骰子的点数是j，则样本空间Ω有36个样本点．

而事件$A=\{(6，1)，(6，2)，(6，3)，(6，4)，(6，5)，(6，6)\}$，共包含6个样本点，

事件$B=\{(1，6)，(2，6)，(3，6)，(4，6)，(5，6)，(6，6)\}$，也包含6个样本点，

事件$A\cup B=\{(6，1)，(6，2)，(6，3)，(6，4)，(6，5)，(6，6)，(1，6)，(2，6)，(3，6)，(4，6)，(5，6)\}$，共包含11个样本点．

由古典概型概率计算公式可得

$$P(A)=\frac{6}{36}，P(B)=\frac{6}{36}，P(A\cup B)=\frac{11}{36}.$$

此时可发现$P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$．

分析事件A，B，可以发现样本点$(6，6)$在$P(A)$与$P(B)$中各算了一次，且$A\cap B=\{(6，6)\}$．

又$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$，

这时可以发现$P(A\cup B)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$．

于是，我们猜测有如下**一般概率加法公式**：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

我们在古典概型的情况下来推导上述加法公式．

设A，B是Ω中的两个事件(图 5.2－3)．

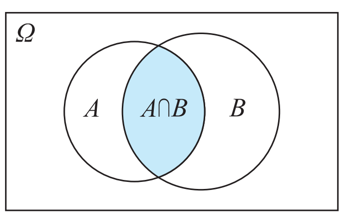


图 5.2－3

由图 5.2－3 可以看出，$A\cup B$ 中的样本点个数等于 A 中的样本点个数加上 B 中的样本点个数，并减去$A\cap B$ 中的样本点个数.

所以

$$P(A\cup B)=\frac{A\cup B\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}$$
$$=\frac{A\text{ 中的样本点个数}+B\text{ 中的样本点个数}-A\cap B\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

在一般概率加法公式中，若 $A\cap B=\varnothing$，即 $P(A\cap B)=0$，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

这就是说，互斥事件的概率加法公式是一般概率加法公式的特殊情形.

例 5 从 1，2，3，…，30 中任意选一个数，求这个数是偶数或能被 3 整除的概率.

解 设 A=“选到偶数”，B=“选到能被 3 整除的数”，则

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$，共包含 15 个元素，

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$，共包含 10 个元素，

$A\cap B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$，共包含 5 个元素，

因而

$$P(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6},$$

因此，这个数是偶数或能被 3 整除的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

例 6 某企业有三个分厂，现将男女职工人数统计如下：

项目	第一分厂	第二分厂	第三分厂	总计
男	400 人	350 人	250 人	1 000 人
女	100 人	50 人	50 人	200 人
总计	500 人	400 人	300 人	1 200 人

若从中任意抽取一名职工，则该职工是女性或是第三分厂职工的概率是多少？

解 设 A＝“抽到女工”，B＝“抽到第三分厂职工”，则

$$P(A)=\frac{200}{1\,200}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{300}{1\,200}=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=\frac{50}{1\,200}=\frac{1}{24},$$

因此，该职工是女性或是第三分厂职工的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\\&=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

练习

1. 抛掷两枚质地均匀的骰子，观察出现的点数，求至少一枚骰子出现偶数点的概率.

2. 职工甲在同一车站可以乘 A 路或 B 路公交车上班. 如果公交车在 10 min 内到达，甲上班就不会迟到. 如果 A 路车，B 路车在 10 min 内到达的概率分别是 0.6 和 0.8，同时到达的概率是 0.45，计算甲不迟到的概率.

3. 一盒试样共有 20 支，放置一段时间后发现，其中有 6 支澄明度较差，有 5 支标记已不清楚，有 4 支澄明度和标记都不合要求. 现从中随意取出一支，求这一支无任何上述问题的概率.

习题 5.2

学而时习之

1. 一个正方体的表面涂满了红色. 在它的每个面上切两刀，可得 27 个小正方体，从中任取一个，求恰有一个面涂有红色的概率.

2. 袋中装有质地均匀的红、白色球各一个，每次任取一个，有放回地抽取三次，写出所有的样本点，并计算下列事件的概率：

(1) 三次中恰有两个球同色；

(2) 三次抽取的球颜色相同；

(3) 三次抽取的球中红色球出现的次数多于白色球出现的次数.

3. 某电视台要招聘两名播音员，现在有三名符合条件的女士和两名符合条件

的男士前来应聘. 如果每个应聘人员被录用的概率相同，计算下列事件的概率：

(1) 一名男士和一名女士被录用；

(2) 两名男士被录用；

(3) 两名女士被录用.

4. 抛掷两枚质地均匀的骰子，试计算下列事件的概率：

(1) 两枚骰子的点数相同；

(2) 两枚骰子的点数之和是 6；

(3) 两枚骰子的点数之和不是 6；

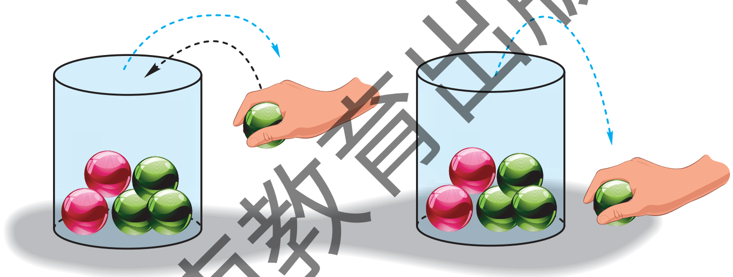
(4) 至少一枚骰子的点数是 3.

5. 一不透明容器中装有仅颜色不同的 4 个绿球和 2 个红球，分别采用有放回和不放回两种方式从中取两球. 试分别就两种取球方式计算下列事件的概率：

(1) 取到两绿球；

(2) 取到两颜色相同的球；

(3) 取到的两球中至少有一个为绿球.



(1) 有放回抽样　　(2) 不放回抽样

(第 5 题)

6. 用一台自动机床加工一批螺母，从中抽出 100 个逐个进行直径检验，结果如下：

直径 d/cm	个数	直径 d/cm	个数
$6.88<d\leqslant 6.89$	1	$6.93<d\leqslant 6.94$	26
$6.89<d\leqslant 6.90$	2	$6.94<d\leqslant 6.95$	15
$6.90<d\leqslant 6.91$	10	$6.95<d\leqslant 6.96$	8
$6.91<d\leqslant 6.92$	17	$6.96<d\leqslant 6.97$	2
$6.92<d\leqslant 6.93$	17	$6.97<d\leqslant 6.98$	2

从这 100 个螺母中任意抽取一个，求：

(1) $6.92<d\leqslant 6.94$ 的概率；

(2) $6.90<d\leqslant 6.96$ 的概率；

(3) $d>6.96$ 的概率；

(4) $d\leqslant 6.89$ 的概率.

7. 一个电路板上装有甲、乙两根熔丝，某种情况下甲熔断的概率为 0.85，乙熔断的概率为 0.74，两根同时熔断的概率为 0.63，问该情况下至少有一根熔断的概率是多少？

8. 甲、乙两人各射击一次，命中概率分别为 0.8 和 0.5，两人同时命中的概率为 0.4，求甲、乙至少有一人命中的概率.

9. 河流 A 与河流 B 是水库 C 的主要水源，只要河流 A，B 之一不缺水，水库 C 就不缺水. 根据经验知道河流 A，B 不缺水的概率分别是 0.7 和 0.9，同时不缺水的概率是 0.65. 试计算水库 C 不缺水的概率.

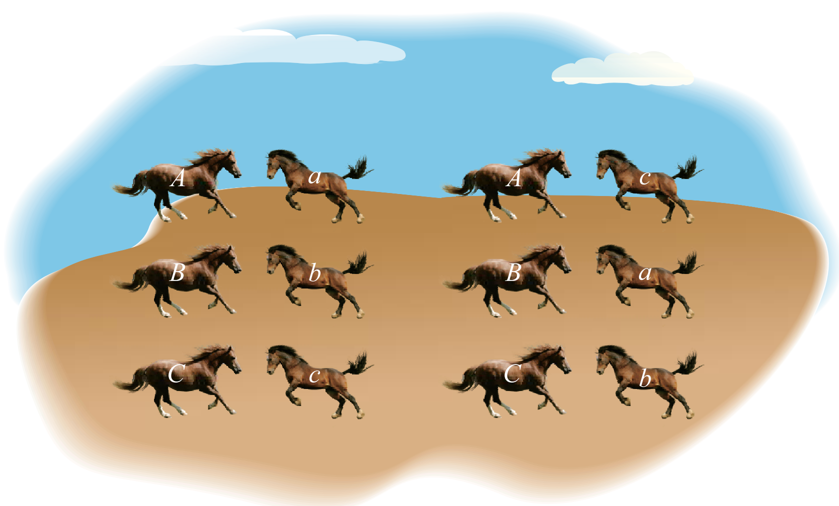
10. 已知样本空间 Ω 的事件 A，B，C 两两互斥，$A\cup B\cup C$ 表示事件 A，B，C 中至少有一个发生.

求证：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

温故而知新

11. 在分别写有 2，4，6，7，8，11，12，13 的 8 张卡片中任取两张，将取出的两张卡片上的两个数组成一个分数，试求所得分数是既约分数(分子与分母之间没有大于 1 的公因数)的概率.

12. 田忌赛马是历史上有名的故事. 设齐王的三匹马分别为 A，B，C，田忌的三匹马分别为 a，b，c；三匹马各比赛一次，胜两局者获胜. 这六匹马的比赛优、劣程度可用以下不等式表示：$A>a>B>b>C>c$.



（第 12 题）

（1）正常情况下，求田忌获胜的概率；

（2）为了得到更大的获胜机会，田忌预先派出探子到齐王处打探实情，得知齐王第一场必出上等马 A，于是田忌采用了最恰当的应对策略，求这时田忌获胜的概率.

13. 袋子中放有大小和形状相同的小球若干个，其中标号为 0 的小球一个，标号为 1 的小球一个，标号为 2 的小球 n 个. 已知从袋子中随机抽取一个小球，取到标号是 2 的小球的概率是 $\frac{1}{2}$.

（1）求 n 的值；

（2）从袋子中不放回地随机抽取两个小球，记第一次取出的小球标号为 a，第二次取出的小球标号为 b，记事件 A 表示“$a+b=2$”，求事件 A 的概率.

5.3 用频率估计概率

不是所有的随机试验都像 5.2 节所示的案例那样，每个样本点出现的可能性相等并且样本点的个数有限. 事实上，现实生活中的随机事件是各式各样的，那么在一般情形下，如何求出或近似求出事件的概率呢？

为了方便讨论，我们先来介绍事件发生的频率.

设 Ω 是某个试验的样本空间，A 是 Ω 的事件. 在相同的条件下将该试验独立地重复 n 次，则称

$$F_n(A)=\frac{n\text{ 次试验中 }A\text{ 发生的次数}}{n}$$

是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的**频率**. 例如抛掷 100 次质地均匀的硬币，若得到 51 次正面朝上，那么“正面朝上”这一事件在这 100 次试验中的频率为$\frac{51}{100}$.

容易想到，一般地，如果事件 A 发生的可能性愈大，频率 $F_n(A)$ 也愈大；反之，如果$F_n(A)$愈大，那么可以设想事件 A 发生的可能性也愈大. 因此，频率与概率间应有紧密的联系.

我们还是从最简单的随机试验——抛掷质地均匀的硬币谈起. 将全班同学分为 10 组，每组分别至少抛掷质地均匀的硬币 100 次，观察掷出正面朝上的次数，将结果填入下表：

小组编号	抛掷次数 n	正面朝上的次数 m	正面朝上的频率$\frac{m}{n}$

将上表中的数据描在图 5.3－1 中，并用折线将这些点连接起来.

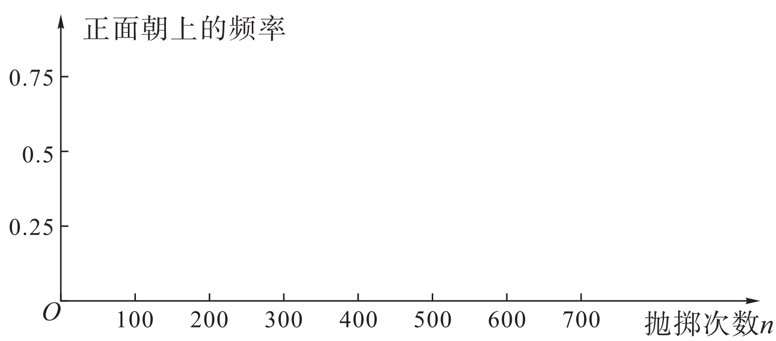


图 5.3－1

许多随机试验都可以在计算机上方便地进行，同学们也可以借助计算机开展试验.

观察图 5.3-1 并思考：随着抛掷次数的增多，正面朝上的频率会稳定在哪个数据附近？

由古典概型概率计算公式，我们可得到“正面朝上”的概率为$\frac{1}{2}$. 历史上曾经有许多人做过抛掷硬币的试验以验证这一结果的正确性.

下表是历史文献中记录的一些学者抛掷硬币的试验结果. 从表中可发现，在大量抛掷硬币的试验中，“正面朝上”的频率稳定在 0.5 附近.

试验者	掷币次数 n	正面朝上次数	频率 $F_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
布丰	4 040	2 048	0.506 9
凯瑞	7 000	3 516	0.502 3
凯瑞	9 000	4 538	0.504 2
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	40 173	0.498 2

理论和实践都证明：在相同的条件下，将一试验独立重复 n 次，若用 $F_n(A)$表示事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，则当 n 增加时，$F_n(A)$将向一个固定的数值 p 靠近，这个数值 p 就可看作事件 A 发生的概率 $P(A)$，即 $F_n(A)$是 $P(A)$的**估计**.

需要指出的是，频率和概率都是随机事件发生可能性大小的定量刻画，但频率与试验次数及具体的试验有关，因此频率具有随机性；而概率是刻画随机事件发生可能性大小的数值，是一个固定的量，不具有随机性，因此频率不能完全反映概率. 例如抛掷 100 次质地均匀的硬币，并不一定能得到“正面朝上”的频率是$\frac{1}{2}$. 试验次数不同，频率不一定相同，而且这 n 次试验与另外 n 次试验的频率也可能不同.

例 一个不透明的口袋里装有只有颜色不同的黑球、白球共 20 个，某学习小组做摸球试验，将球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回袋中，不断重复. 下表是活动进行中的一组统计数据：

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到白球的频数 m	58	96	116	295	484	601
摸到白球的频率$\frac{m}{n}$	0.580	0.640	0.580	0.590	0.605	0.601

(1) 试估计当 n 很大时，摸到白球的频率将会接近多少；

(2) 假如你去摸一次，摸到白球或黑球的概率分别约是多少?

解 (1) 由表可知当 $n \geqslant 500$ 时，频率值稳定在 0.6 左右，由此可估计，当 n 很大时，摸到白球的频率将会接近 0.6.

(2) 由(1)可知，摸到白球的频率约为 0.6，因此可估计摸到白球的概率是 0.6. 由对立事件的概率加法公式可得，摸到黑球的概率约为 $1-0.6=0.4$.

练习

1. 下表是用计算机模拟的抛掷一枚质地均匀的骰子的试验数据. 其中 n 是试验的次数，表中的百分数是频率.

点数	$n=10^2$	$n=10^3$	$n=5\ 000$	$n=10^4$	$n=10^5$	$n=10^6$
1	17.00%	16.50%	16.28%	16.61%	16.72%	16.69%
2	15.00%	15.50%	17.12%	16.62%	16.44%	16.62%
3	18.00%	17.10%	16.78%	16.94%	16.84%	16.69%
4	18.00%	16.00%	16.68%	16.97%	16.76%	16.64%
5	13.00%	16.60%	15.50%	15.94%	16.69%	16.64%
6	19.00%	18.30%	17.64%	16.92%	16.55%	16.72%

借助表格说明：当试验的次数逐步增加时，每个点数出现的频率有哪些变化?

2. 某计生部门统计本地区 4 年内的新生婴儿数及其中的男婴数，得到如下数据：

时间范围	1 年内	2 年内	3 年内	4 年内
新生婴儿数 n	5 544	9 607	13 520	17 190
男婴数 n_A	2 883	4 970	6 994	8 892

(1) 计算男婴出生的频率(保留四位小数)；

(2) 这一地区男婴出生的频率是否稳定在一个常数上?

习题 5.3

学而时习之

1. 有三张除字母外完全相同的纸牌，字母分别是 K，K，Q. 进行有放回的抽样，每次试验抽出一张纸牌，经过多次试验后结果汇总如下表：

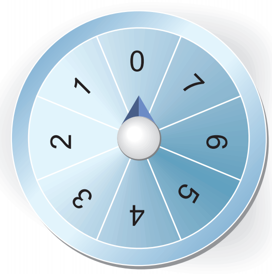
试验总次数	10	20	50	100	200	300	400	500	1 000	…
抽出 K 的频数	7	13	32		136	198	270		660	…
抽出 K 的频率				65%				67%		…

(1) 将上述表格补充完整；

(2) 观察表格，计算摸到 K 的频率为多少；

(3) 估计摸到 K 的概率.

2. 某商场设立了一个可以自由转动的转盘(如图所示)，并做如下规定：顾客购物 80 元以上就获得一次转动转盘的机会，当转盘停止时，指针落在哪一区域就可以获得相应的奖品.



(第 2 题)

下表是活动进行中的一组统计数据：

转动转盘的次数 m	100	150	200	500	800	1 000
落在区域“1”的频数 n	13	19	24	62	100	120
落在区域“1”的频率 $\frac{n}{m}$						

(1) 计算并完成表格.

(2) 当 n 很大时，落在区域“1”的频率将会接近多少？

(3) 你获得区域“1”相应奖品的概率大约为多少？

3. 小李有一块不规则形状的五面体石块，他将每个面分别标上 1，2，3，4，5 后，抛掷了 100 次，并且记录了每个面落在地面上的次数(如下表). 如果再抛掷一次，试估计标记为 4 的这一面落在地面上的概率是多少.

石块的面	1	2	3	4	5
频　数	32	18	15	13	22

温故而知新

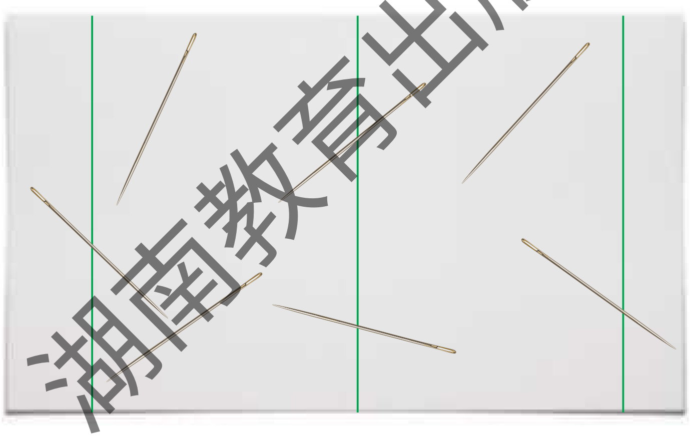
4. 用事件出现的频率与事件的概率之间的关系说明：

(1) 不可能事件的概率是 0；

(2) 必然事件的概率是 1；

(3) 任何事件 A 的概率满足 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

5. （数学探究活动）1777 年的一天，法国博物学家布丰先生在家里为宾客们做了一次有趣的试验：首先，他在一张白纸上画满了一条条距离相等的平行线．然后，他抓出一大把长度都是平行线之间距离的一半的小针，让客人把小针一根根地往纸上乱扔．最后，布丰宣布结果：大家共投针 2 212 次，其中与直线相交的就有 704 次．用 704 去除 2 212，得数为 3.142．他笑了笑说："这就是圆周率 π 的近似值．"这就是数学史上有名的"投针试验"．查阅相关资料，了解"投针试验"的背景及原理，并与小组同学合作完成上述试验，你的结果也与 π 近似吗？



（第 5 题）

数学实验

用计算机模拟掷质地均匀的硬币试验

掷质地均匀的硬币是最简单也是最经典的随机试验. 在同样条件下，反复多次掷一枚质地均匀的硬币，出现“正面朝上”的次数大致是所掷总次数的一半. 实际上，真的拿一枚硬币去抛掷，要花去许多时间，如果我们借助计算机来模拟这个试验，也将取得不错的效果.

操作步骤：

1. 打开 Excel，在 A1 栏输入“=IF(RAND(　)>0.5,“正”,“反”)”，然后利用填充柄一直拖动到 A5000. 这是让计算机随机生成[0，1]之间的数，假设大于 0.5，则认为是正面，否则就是反面.

2. 在 B1 栏输入“=COUNTIF(A1：A5000，“正”)/5000”，在 B2 栏输入“=COUNTIF(A1：A5000，“反”)/5000”. B1 和 B2 分别是统计“正面朝上”和“反面朝上”的频率.

3. 以 B1 和 B2 为数据源作柱形图.

4. 选择一个空白单元格，不断按 Delete 键，那么 A 列数据会不断更新，从而 B1，B2 数据更新，柱形图也在不断发生变化. 但变化是有规律的，就是两个柱形图的高度总是在 0.5 左右波动，如图 1.

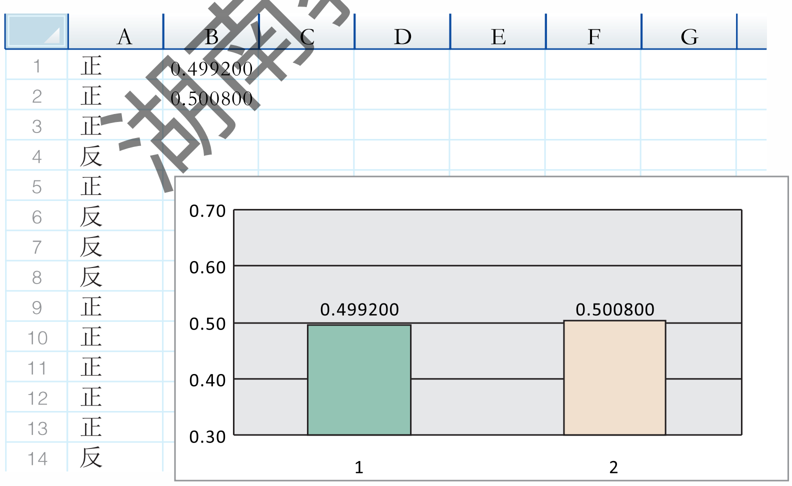


图 1

自己动手在计算机上操作这个试验.

5.4 随机事件的独立性

在相同的条件下分别抛掷甲、乙两枚质地均匀的硬币. 设 A 表示“甲正面朝上”，B 表示“乙正面朝上”，则 $A\cap B$ 表示“甲、乙都正面朝上”. 分别计算事件 A，B，$A\cap B$ 的概率，你有何发现?

记 H 表示正面朝上，T 表示反面朝上，则该试验的样本空间为

$$\Omega=\{HH，HT，TH，TT\}.$$

又事件 $A=\{HH，HT\}$，$B=\{HH，TH\}$，$A\cap B=\{HH\}$，

因此 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

这时可以发现 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

在概率论中，设 A，B 为两个事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，则称**事件 A，B 相互独立**，简称为独立.

由独立事件的定义可知，必然事件 Ω 及不可能事件 $\varnothing$ 都与任何事件独立.

例 1 一个家庭中有若干小孩，假定生男孩与生女孩是等可能的，设

$$A=“一个家庭中既有男孩又有女孩”,$$
$$B=“一个家庭中最多有一个女孩”,$$

对下述两种情形，讨论事件 A 与 B 的独立性：

（1）家庭中有两个小孩；

（2）家庭中有三个小孩.

解 （1）有两个小孩的家庭，样本空间

$$\Omega=\{(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)\},$$

它有 4 个基本事件，由等可能性知概率各为 $\frac{1}{4}$，这时

$$A=\{(男，女)，(女，男)\},$$
$$B=\{(男，男)，(男，女)，(女，男)\},$$
$$A\cap B=\{(男，女)，(女，男)\}.$$

于是

$$P(A)=\frac{1}{2}，P(B)=\frac{3}{4}，P(A\cap B)=\frac{1}{2}.$$

由此可知

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B),$$

所以事件 A，B 不独立.

（2）有三个小孩的家庭，样本空间

Ω={（男，男，男），（男，男，女），（男，女，男），（女，男，男），（男，女，女），（女，男，女），（女，女，男），（女，女，女）}.

由等可能性知这 8 个基本事件的概率均为$\frac{1}{8}$，这时 A 含有 6 个基本事件，B 含有 4 个基本事件，$A\cap B$ 含有 3 个基本事件，

于是

$$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ P(A\cap B)=\frac{3}{8}.$$

显然有

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}=P(A)P(B)$$

成立，从而事件 A 与 B 是独立的.

例 1 说明两个事件是否独立不能全靠直觉，要对随机现象进行研究后才能得出正确结论.

根据定义，若事件 A，B 独立，则计算 $P(A\cap B)$的公式为

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

根据以上公式，可以得到：

若事件 A，B 独立，则 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立.

下面只证明若事件 A，B 独立，则事件 A 与$\overline{B}$独立，其他类似可以证明.

因为 $A=A\cap\Omega=A\cap(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，

于是 $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})$，而 AB 与 $A\overline{B}$互斥，

因此 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$.

故 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$

$\qquad\qquad=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$.

所以 $P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$，也就是说事件 A，$\overline{B}$也独立.

虽然两个事件是否独立不能全靠直觉，要对随机现象进行研究，经过计算后才能得出正确结论，但在实际应用时，如果根据问题的实际背景，可以判断出事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响，或者事件 B 是否发生对事件 A 发生的概率

也没有影响，那就可以说事件 A，B 独立，从而运用事件独立的概念进行推导和计算.

例 2 甲、乙两人练习射击，甲命中的概率为 0.8，乙命中的概率为 0.7，两人同时射击，且中靶与否独立，求：

（1）甲或乙命中的概率；

（2）甲中、乙不中的概率；

（3）甲不中、乙中的概率.

解 设 A= “甲命中”，B= “乙命中”，则 $A\cup B$= “甲或乙命中”，$A\cap\overline{B}$= “甲中、乙不中”，$\overline{A}\cap B$= “甲不中、乙中”，且

$$P(A)=0.8,\ P(B)=0.7.$$

（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=0.94.$

（2）$P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.8\times0.3=0.24.$

（3）$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)=0.2\times0.7=0.14.$

练习

1. 两门高炮同时向一架靶机射击，每门高炮击中靶机的概率都是 0.8. 计算：

（1）靶机没被击中的概率；

（2）靶机被击中一炮的概率；

（3）靶机被击中两炮的概率.

2. 设事件 A，B 独立，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，求 $P(A\cup\overline{B})$.

习题 5.4

学而时习之

1. 一个口袋装有两个白球和两个黑球，把“从中任意摸出一个球，得到白球”记作事件 A，把“从剩下的三个球中任意摸出一个球，得到白球”记作事件 B.

（1）在先摸出白球后，再摸出白球的概率是多少？

(2) 在先摸出黑球后，再摸出白球的概率是多少?

(3) 事件 A 与 B 是独立的吗?

2. 甲、乙两人各进行一次射击，如果两人命中目标的概率都是 0.6，计算：

(1) 两人都命中目标的概率；

(2) 恰有一人命中目标的概率；

(3) 至少有一人命中目标的概率.

3. 在某段时间内，甲地下雨的概率是 0.2，乙地下雨的概率是 0.3，假定在这段时间内两地是否下雨相互之间没有影响，计算在这段时间内

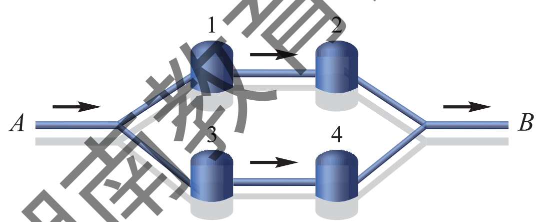
(1) 甲、乙两地都下雨的概率；

(2) 甲、乙两地都不下雨的概率；

(3) 其中至少有一个地方下雨的概率.

温故而知新

4. 如图，某城市供水系统包括 4 台水泵，4 台水泵按先串联再并联的方式连接. 设第 i 台水泵的可靠性为 $p_i(i=1, 2, 3, 4)$，试求水从 A 一直流到 B 的概率.



(第 4 题)

5. 某田径队有三名短跑运动员，根据平时训练情况，甲、乙、丙三人 100 m 跑(互不影响)的成绩在 13 s 内(称为合格)的概率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{3}$. 若对这三名短跑运动员的 100 m 跑进行一次检测，试计算：

(1) 三人都合格的概率；

(2) 三人都不合格的概率；

(3) 出现几人合格的概率最大.

数学文化

概率论发展简史

概率论是一门研究随机现象的学科．它起源于对赌博问题的研究．早在 16 世纪，意大利学者卡尔达诺(1501—1576)与塔尔塔里亚(1499—1557) 等人就已从数学角度研究过赌博问题．他们的研究除了赌博外还与当时的人口、保险业等有关，但由于卡尔达诺等人的思想未引起重视，概率概念的要旨也不明确，于是很快被人们淡忘了．

17 世纪中叶，法国数学家帕斯卡(1623—1662)与费马(1601—1665)通过书信讨论“合理分配赌注问题”时，概率概念的要旨才明晰起来．

帕斯卡

费马

帕斯卡与费马用各自不同的方法解决了这一问题．虽然他们在解答中没有明确定义概率，但是他们定义了某赌徒取胜的机遇，也就是赢的情况数与所有可能情况数的比，这实际上就是概率，所以概率的发展被认为是从帕斯卡与费马开始的．

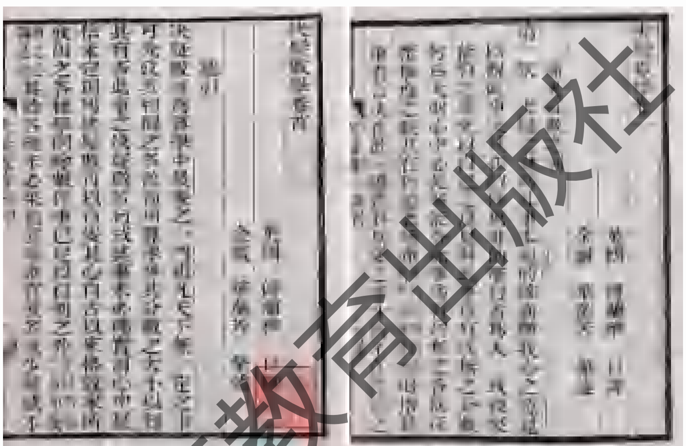
概率论的第一本专著是 1713 年问世的《猜度术》，作者为雅科布·伯努利(1654—1705)．经过二十多年的研究，雅科布·伯努利在该书中表述并证明了著名的“大数定律”．简单地描述大数定律就是，当试验次数很大时，事件出现的频率与概率有较大偏差的可能性很小．大数定律第一次在单一的概率值与众多现象的统计度量之间建立了演绎关系，构建了从概率论通向更广泛应用领域的桥梁．因此，雅科布·伯努利被称为概率论的奠基人．

雅科布·伯努利

为概率论建立严密理论基础的是数学家柯尔莫哥罗夫(1903—1987). 1933 年，他发表了著名的《概率论基础》，用公理化结构明确定义了概率论中的基本概念，成为概率论发展史上的一个里程碑，这为以后概率论的迅速发展奠定了基础.

柯尔莫哥罗夫

1880 年 7 月，清朝数学家华蘅芳(1833—1902)和来华英国传教士傅兰雅编译出《决疑数学》，这是我国第一部编译的概率论著作. 因担心其难以被中国学者接受，直到 1896 年才由周学熙刊刻出版，虽“印行无几，流布甚稀”，但敲开了中国概率学之门.



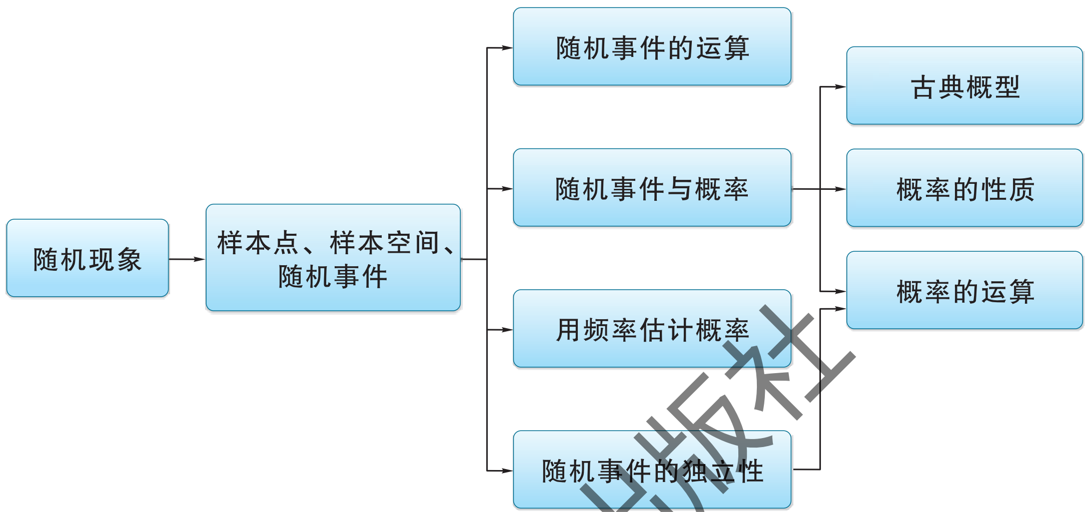
《决疑数学》书影

在我国近现代，许宝騄(1910—1970)教授是概率论和统计学研究的先驱，在国际上享有盛誉. 1979 年，世界著名的统计期刊《数理统计年鉴》邀请一些著名的学者撰文介绍他的生平，并高度评价他在概率论和统计学两方面的研究工作.

20 世纪以来，由于物理学、生物学、工程技术、农业技术和军事技术发展的推动，概率论得到了飞速发展，其理论课题不断扩大与深入，应用范围也在不断拓宽. 在最近几十年中，概率论的方法被引入各个工程技术学科和社会学科，在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等方面都得到了重要应用. 越来越多的概率论方法被引入经济、金融和管理科学中，概率论成为它们的有力工具. 现在，概率论已成为一门与实际紧密相连的理论严谨的数学分支.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 在现实世界中，随机现象比比皆是．为了刻画并研究随机现象，我们引入了样本空间、样本点、随机事件等概念．如何理解样本点、有限样本空间的含义？随机事件与样本点之间有何关系？

2. 样本空间、样本点、随机事件可以和全集、元素、子集对应．随机事件的运算和集合的算法是相同的．试举例说明随机事件的并、交、互斥的含义．

3. 古典概型有何特征？古典概型的概率如何计算？你能理解“在某种意义上，求古典概型的概率问题是一个数数问题”这句话的含义吗？

4. 概率具有哪些基本性质？如何理解这些性质？概率的可加性是其性质中最为本质的，试结合实例，运用概率的运算法则解决一些简单的实际问题．

5. 如何理解随机事件出现的频率与概率之间的联系与区别？

6. 如何理解两个随机事件的独立性？试结合古典概型的实例，利用独立性计算概率．

复习题五

学而时习之

1. 口袋中装有标号 1～5 的同样的小球，写出以下试验的样本点和样本空间：

(1) 从中任取一个；

(2) 从中一次任意取出两个.

2. 班里有 18 个男生，15 个女生，其中一名女生叫小丽，从中任意抽取 a 人打扫卫生.

(1) 女生被抽到是必然事件，求 a 的取值范围；

(2) 女生小丽被抽到是随机事件，求 a 的取值范围.

3. 将一枚质地均匀的骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，问：

(1) 共有多少种不同的可能结果？

(2) 点数之和是 3 的倍数的可能结果有多少种？

(3) 点数之和是 3 的倍数的概率是多少？

4. 某商区停车场临时停车按时段收费，收费标准为：每辆汽车一次停车不超过 1 h 收费 6 元，超过 1 h 的部分每小时收费 8 元(不足 1 h 的部分按 1 h 计算). 现有甲、乙两人在该商区临时停车，两人停车都不超过 4 h.

(1) 若甲停车 1 h 以上且不超过 2 h 的概率为 $\frac{1}{3}$，停车付费多于 14 元的概率为 $\frac{5}{12}$，求甲停车付费恰为 6 元的概率；

(2) 若每人停车的时长在每个时段的可能性相同，求甲、乙两人停车付费之和为 36 元的概率.

5. 小明、小亮和小强三人准备下象棋，他们约定用“抛硬币”的游戏方式来确定哪两个人先下棋，规则如右图所示. 求一个回合能确定两人先下棋的概率.

游戏规则

三人手中各持有一枚质地均匀的硬币，他们同时将手中的硬币抛落到水平地面上为一个回合. 落地后，三枚硬币中，恰有两枚正面向上或者反面向上的两人先下棋；若三枚硬币均为正面向上或反面向上，则不能确定哪两人先下棋.

(第 5 题)

6. 抛掷两枚质地均匀的骰子，计算以下事件的概率：

(1) A=“两枚骰子的点数之和是 2”；

(2) B=“两枚骰子的点数之和是 4”；

(3) C=“两枚骰子的点数之和是 6”；

(4) 以上三个事件中，哪个概率最大，为什么？

7. 一批产品有 30 个，其中含有 3 个次品，从中随机抽取 1 个. 计算：

(1) 这个产品是次品的概率；

(2) 这个产品是正品的概率.

8. 黄色人种种群中各种血型的人所占比例如下表所示：

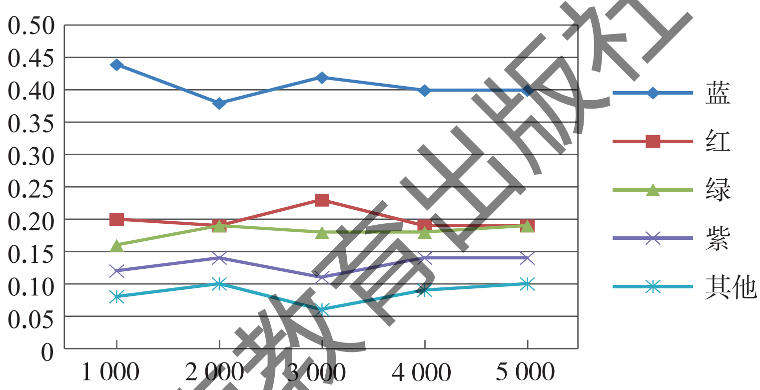
血　型	A	B	AB	O
该血型的人所占比例/%	28	24	7	41

已知同种血型的人可以输血，O 型血可以输给任一种血型的人，任何人的血都可以输给 AB 型血的人，其他不同血型的人不能互相输血. 小明是 B 型血，若小明因病需要输血，问：

（1）任找一个人，其血可以输给小明的概率是多少？

（2）任找一个人，其血不能输给小明的概率是多少？

9. 某文具厂打算生产一种中学生使用的笔袋，但无法确定各种颜色的产量，于是该文具厂就笔袋的颜色随机调查了 5 000 名中学生，并在调查到 1 000 名，2 000 名，3 000 名，4 000 名，5 000 名时分别计算了各种颜色的频率，绘制的折线图如下：



（第 9 题）

（1）随着调查次数的增加，红色的频率如何变化？

（2）你能估计中学生选取红色的概率是多少吗？

（3）若你是该厂的负责人，你将如何安排生产各种颜色笔袋的产量？

10. 在添加剂的使用搭配中，为了找到最佳的搭配方案，需要对各种不同的搭配方式做比较. 在试制某种牙膏新产品时，需要选用两种添加剂. 现有芳香度分别为 0，1，2，3，4，5 的 6 种添加剂可供选用. 根据试验设计原理，要随机选取两种添加剂进行搭配试验，求：

（1）所选用的两种添加剂的芳香度之和等于 4 的概率；

（2）所选用的两种添加剂的芳香度之和不小于 3 的概率.

11. 甲袋中有 5 个球(3 红，2 白)，乙袋中有 3 个球(2 红，1 白)，从每袋中各任取 1 个球，求至少取到 1 个白球的概率.

12. 甲、乙两人单独解一道题，若甲、乙能解对该题的概率分别是 m，n，求此题被解对的概率.

13. 100 个产品中有 93 个产品长度合格，90 个产品宽度合格，其中长度、宽度都合格

的有 85 个. 现从中任取一产品，记 A=“产品长度合格”，B=“产品宽度合格”，求产品的长度、宽度至少有一个合格的概率.

14. 从 1～100 的整数中任取一个数，试求取到的数能被 5 或 9 整除的概率.

15. 甲、乙等四人参加 4×100 m 接力赛，随机安排次序时，求甲跑第一棒或乙跑第四棒的概率.

温故而知新

16. A，B，C 三个班共有 100 名学生，为调查他们的体育锻炼情况，通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间，数据如下表所示：

A 班/h	6　6.5　7　7.5　8
B 班/h	6　7　8　9　10　11　12
C 班/h	3　4.5　6　7.5　9　10.5　12　13.5

（1）试估计 C 班的学生人数；

（2）从 A 班和 C 班抽出的学生中各随机选取一个人，A 班选出的人记为甲，C 班选出的人记为乙，假设所有学生的锻炼时间相互独立，求该周甲的锻炼时间比乙长的概率.

17. 某射击运动员脱靶的概率是 0.01%，如果他独立重复射击下去，必有一次脱靶发生.（利用频率和概率的关系说明）

18. 常言道：“三个臭皮匠，赛过诸葛亮.” 意为：三个才能平庸的人，若能同心协力、集思广益，也能提出比诸葛亮还周到的计策. 这是对人多智慧广、人多办法多的一种赞誉. 试用两种计算概率的方法来加以论证. 假设诸葛亮解出问题的概率为 0.8，三个臭皮匠独立解出问题的概率分别为 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.48$，$P(C)=0.45$，且每个臭皮匠解出问题是相互独立的.

19. 某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区	62	73	81	92	95	85	74	64	53	76
	78	86	95	66	97	78	88	82	76	89
B 地区	73	83	62	51	91	46	53	73	64	82
	93	48	65	81	74	56	54	76	65	79

根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C："A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级"，假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求事件 C 的概率.

上下而求索

20. 甲、乙两人玩射击游戏，甲、乙射击命中与否是相互独立事件. 规则如下：若射击一次命中，则原射击人继续射击；若射击一次不中，就由对方接替射击. 已知甲、乙两人射击一次命中的概率均为 $\frac{1}{3}$，且第一次由甲开始射击.

（1）求前 3 次射击中甲恰好命中 2 次的概率；

（2）求第 4 次由甲射击的概率.

21. 某校举行科普知识竞赛，一共十道题，计分规则是：答对一道得 10 分，答错一道扣 10 分，不答既不得分也不扣分. 某同学答对了前面六道题，且他答对剩下每道题的概率都是 $p(0<p<1)$，问该同学回答多少道题时，至少得 70 分的概率最大?（每道题的回答互不影响）

6

第6章

数学建模

数学建模活动是对现实问题进行抽象，用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程. 该过程主要包括：在实际情景中从数学的视角发现问题，提出问题，分析问题，构建模型，求解结论，验证结果并改进模型，最终解决实际问题.

本章我们将走进丰富多彩的数学建模世界，感受数学的力量与美.

6.1 走进异彩纷呈的数学建模世界

在日常生活中，大家可能都有过下面的经历：

● 在雨中行走的时候，人们通常会选择以尽可能快的速度行走，以减少淋雨时间(图 6.1－1).

我们是否思考过这样的问题：对于同一段路程，在雨中行走速度越快(即淋雨时间越少)，淋雨量(人在雨中行走时全身所接收到的雨的体积)就一定会越少吗?

图 6.1－1

图 6.1－2

● 在足球比赛中，若球员沿直线带球跑动，一般需要寻找与球门张成最大角度的位置来射门. 你想过没有，是否可用数学方法来确定出那个具有最大角度的位置(图 6.1－2)?

● 人们注意到，蜜蜂在构筑巢穴时，蜂房结构为六角柱体，它的开口端是正六边形面，底端是封闭的六角棱锥体的底，由三个相同的菱形组成. 底端菱形的所有锐角均为 $70°32'$，所有钝角均为 $109°28'$(图 6.1－3). 你能从数学的角度解释蜜蜂采用上述几何体作为巢穴的原因吗?

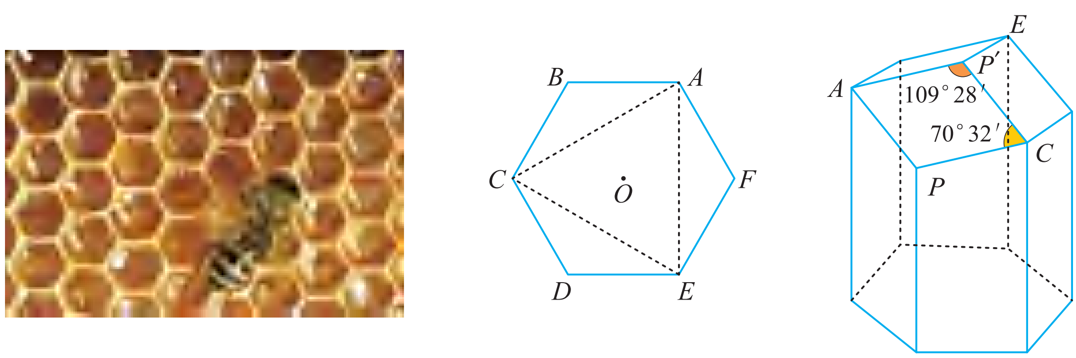


图 6.1－3　蜂房结构

对于上述这些我们身边的问题，都可以通过数学建模(即将实际问题抽象成数学语言来进行描述)，并运用所学的数学知识使问题得到解决.

利用数学建模，人们不仅能够认识自然，有时还会从中受到启发来改造自然. 以蜂房构造为例，当认识到蜂房结构具有容积最大、材料最省等一系列优点后，人们将蜂房构造原理借鉴到人类的生产生活实际中. 例如，在移动通信系统的设计中，通常把移动电话的服务区按照正六边形区域分成若干个区域，每个区域设一个基站，形成了形状酷似蜂窝的结构，从而达到节省资源的目的. 这种移动通信方式称为蜂窝移动通信方式(图 6.1－4).

图 6.1－4　蜂窝移动通信示意

另外，由于在包括隐形飞机在内的航空、航天飞行器的设计中大量采用蜂房结构，因此，这些航空航天器又被称为“蜂窝式航空航天器”.

除了在人们的日常生活中具有重要的作用以外，数学建模也为科学的进步起到了重要作用.

案例 1　(万有引力定律的发现)万有引力是英国伟大的物理学家、数学家和天文学家牛顿提出来的，它是指：任意两个质点通过连心线方向上的引力相互吸引. 该引力大小与它们质量的乘积成正比，与它们距离的平方成反比，而与两物体的化学组成和其间介质种类无关. 其数学表达式为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}.$$

上式中，F 表示两个物体间的引力，G 为万有引力常数，m_1，m_2 表示两个物体的质量，r 表示两个物体间的距离(图 6.1－5).

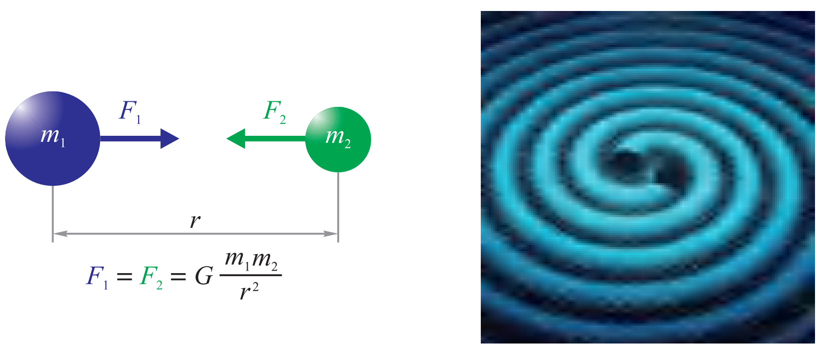


图 6.1－5　万有引力示意

牛顿坐在苹果树下思考引力问题的传奇故事世人皆知，但万有引力定律的发现则是一个较为漫长艰辛的数学建模与求解过程. 由于需要的数学工具大大超出了当时数学的范围，经过长达近 20 年的思考，牛顿才利用开普勒第三定律以及牛顿第二定律，从离心力定律演化出来的向心力定律和自己独立发明的微积分方法，最终建立了万有引力定律模型.

万有引力定律的发现是人类自然科学发展史上最伟大的成果之一，这条定律对自然科学，尤其是对物理学与天文学的发展有着深远的影响.

案例 2 （马尔萨斯人口模型）人口增长问题是一个深受社会学家关注的问题. 英国经济学家、人口学家马尔萨斯最先研究了这个问题，他发现人口的自然增长率在一定的时间内是一个常数，人口的变化率和当前的人口数目成正比.

根据马尔萨斯的观点，现在我们来建立一个可用来描述人口数量随时间变化的数学模型.

假设某地区在时刻 t 时的人口总数为 $N(t)$，经过时间 Δt 后该地区人口的变化率与人口数成正比，比例系数为 $r(r>0)$，则人口总数的增长可用下列数学模型描述：

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t),$$

即

$$N(t+\Delta t)-N(t)=r\Delta tN(t).$$

如果让 Δt 充分小，可以得到下面被称为马尔萨斯方程的人口增长模型：

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)},$$

其中 N_0 为开始时刻该地区的人口总数.

马尔萨斯人口增长模型是一个指数型函数，因此又被称为指数增长模型（如图 6.1－6）. 大量数据表明，在自然状态下，上述模型既可以用来描述某种生长过程，如人口等生物种群的数量变化，某人在银行存款数量的变化等，也可以描述某种传播过程，例如疾病传染、信息的传播等.

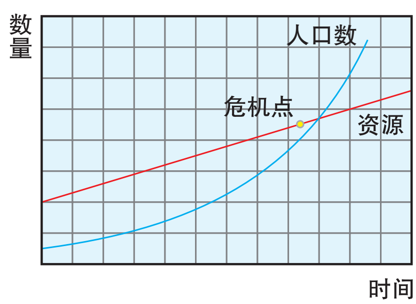


图 6.1－6　人口增长与资源增长曲线

马尔萨斯模型在一个种群的发展初期是合理的，其结论对人类的发展具有启示作用，它提醒人们要防止人口的过快增长，注意人口与生活资源比例协调. 但发展到一定时期后，其缺陷便会凸显出来. 由于没有考虑自然条件与生存环境对人口的制约，人口可以无限制增长，显然用该模型做长期的人口预测是不合理的，需要进一步修改. 但不能否认的是，马尔萨斯人口模型是人类关于人口理论研究的开创性模型.

在一般情况下，马尔萨斯人口模型中的参数，即增长率是未知的，如何求解增长率，则是求解数学模型时需要解决的问题.

案例 3 （哥尼斯堡七桥问题）18 世纪时的哥尼斯堡是东普鲁士的一座风景优美的小城，穿过该小城的普雷格尔河的中心有一座美丽的小岛，河流及其两条支流把包含岛区在内的哥尼斯堡城分为四个区域：东区(A)，北区(B)，岛区(C)以及南区(D). 架在河流上的七座桥将这四个区域连接起来，如图 6.1－7 所示. 市民在哥尼斯堡城行走时提出这样的问题：是否能一次走遍这七座桥，每座桥只允许走一次，最后回到原出发点？这就是著名的哥尼斯堡七桥问题.

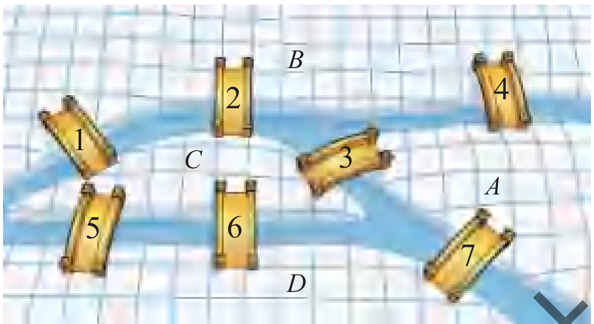


图 6.1－7

当地人热衷于上述问题的解决，尝试了各种不同的行走路线都不得其解. 该问题引起了瑞士数学家欧拉的强烈兴趣. 开始时，欧拉试图将所有的走法一一列举出来，然后对这些走法进行验证，经过计算后欧拉发现不同的走法共有 5 040 种，这样做既浪费时间，而方法也没有通用性. 经过大约一年时间的思考，欧拉将该实际问题抽象成一个数学问题，通过建立数学模型完全解决了哥尼斯堡七桥问题.

欧拉的做法是，首先将岛屿和岸抽象为点，将桥抽象成线，从而将七桥问题抽象成如下一笔画问题：是否可以笔尖不离开纸面，一笔(不重复经过任何一条路线)画出如图 6.1－8 所示的图形？这就是欧拉为了求解七桥问题而建立的数学模型.

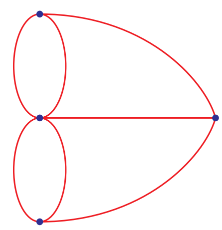


图 6.1－8

进一步，欧拉得到了上述数学模型的求解方法.

从图 6.1－8 中可以看出，每个点都是某些曲线的端点，欧拉将连有偶(奇)数条曲线的点命名为偶(奇)顶点. 容易看出，除去起点和终点外，对于其余的每一个点，如果笔沿某条线进入该点的话，则它必须沿着另一条线出来，从而该顶点一定是偶顶点. 从而得到“一笔画”的充分必要条件为：奇顶点个数为 0 或 2. 奇顶点个数为 0 意味着任意一点都可以作为起点、终点以及中间点，而奇顶点个数为 2 时，其中一个奇顶点为起点(即只有出线)，另一个奇顶点为终点(即只有入线).

由于七桥问题对应的图形中有 4 个奇顶点，不满足“一笔画”的要求，如此说来人们希望找到的不重复路线根本不存在.

对于长久困扰人们的哥尼斯堡七桥问题，欧拉将其抽象成一个简单的数学模型

就轻易解决了. 这表明，用数学的眼光观察问题，用适当的数学语言、模型描述问题，并运用数学的思想、方法解决实际问题，在我们的生产生活中具有多么强大的威力.

欧拉所提出的数学模型具有深远的意义，由此开创了一个新的数学分支——图论，该模型也为新的数学分支——拓扑学的产生奠定了基础.

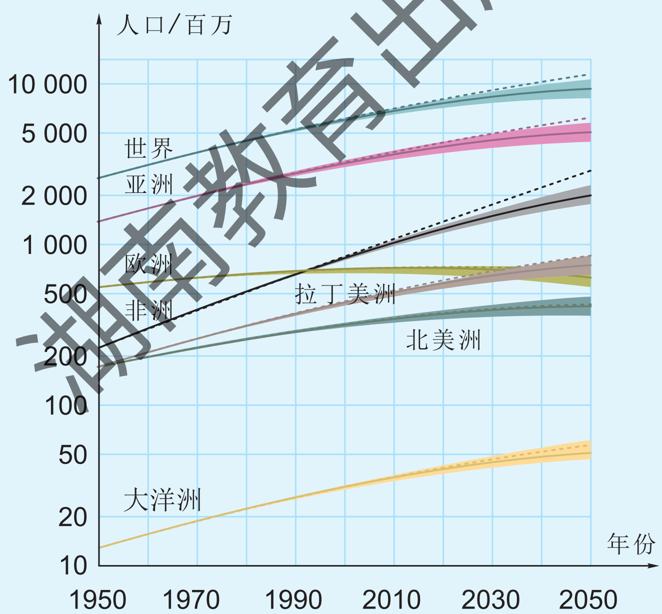
作为本节的结束，我们来对数学模型做一个一般的表述：

数学模型是对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据其特有的内在规律做出一些必要的简化假设，并运用合适的数学工具得到的一个数学结构. 而数学建模过程，则是应用数学方法，通过建立数学模型来解决实际问题的过程.

练 习

问题研究一：人口增长变化曲线

下图为世界各洲在一段时间内人口数量随时间变化的曲线，这些曲线描述的人口变化规律与图 6.1－6 中的曲线有何不同？试分析原因.



问题研究二：测量学校某建筑物的高度

(1) 测量本校的一座教学楼的高度；

(2) 测量本校的旗杆的高度；

(3) 测量学校墙外一座不可及，但在学校操场上可以看得见的高大写字楼(或其他可见的高大建筑)的高度.

要求同学们组成 2～3 人的测量小组，以小组为单位完成实际测量，获取相应

的数据，每人分别填写测量课题报告表(含测量方法、计算过程、计算的数据和结果)，一周后上交.

测量课题报告表

项目名称：__________ 完成时间：__________

1. 成员与分工	
姓名	分工
2. 测量对象	
3. 测量方法(说明测量的原理、测量工具、创新点等)	
4. 测量数据、计算过程和结果(可以另外附图或附页)	
5. 研究结果(含误差分析)	
6. 工作感受	

6.2 数学建模——从自然走向理性之路

16 世纪，意大利物理学家伽利略通过对自由落体运动的研究，得出自由落体运动的路程模型. 自由落体运动方程是自然科学史上一项伟大的成果，该运动方程的得到是数学建模方法的经典之作.

下面，我们以自由落体运动方程为例，说明数学建模的过程.

1. 问题描述

位于高处的物体，如果失去了支撑就会下落，这是每个人都知道的自然现象. 战国时期的墨子以及古希腊哲人亚里士多德就对该现象产生的原因进行过论述，不过古代的人们并不清楚这种现象是力作用的结果，因而普遍认为，导致物体下落的原因是物体的质量.

2. 模型假设

伽利略通过反复观察发现：物体下落的速度随下落的时间而均匀增加，且速度与时间成正比例关系，即 $v \propto t$①. 他注意到，在有介质的空间，物体下落速度必然与物体的形状以及物体的质量有关. 因此只能在理想条件下构建物体下落的模型，为此，必须假定在物体下落的过程中空气阻力可以忽略不计. 在此假设的前提下，物体下落的速度与物体的形状以及物体的质量无关.

不受任何阻力，只在重力作用下降落的物体为自由落体.

3. 模型建立

基于上述假设，如果物体自由下落的时间相同，物体自由下落的高度 h 只与运动时间 t 以及加速度 g② 有关，此时，h 是关于 t 与 g 的函数

$$h=f(t,\ g).$$

4. 模型求解

根据伽利略关于速度与时间成正比例关系，即 $v \propto t$ 的假设，若物体下落 1 s 时的速度为 g m/s，则下落 2 s 时的速度为 $2g$ m/s，…，下落 t s 时的速度为 tg m/s. 伽利略当年利用物体下落 t s 路程的平均速度 $v=\frac{gt}{2}$乘以时间（根据路程＝速度×时间），得到自由落体运动的路程模型为

① 符号“$\propto$”表示成正比例.

② 此处的 g 实际上是重力加速度.

$$h=\bar{v}t=\frac{1}{2}gt^2.$$

上述模型的结果是正确的，但是，它是在取起点与终点的平均速度的情况下得到的，方法欠直观，同时结论也仅对匀加速运动成立(恰好自由落体运动为匀加速运动). 下面我们对上述路程模型给出一个直观的近似证明.

我们从 $v\propto t$ 的假设出发，简要说明上述模型的正确性.

由假设 $v\propto t$，即自由落体运动为匀加速运动，$v-t$ 图象为图 6.2-1 中倾斜的直线. 将图 6.2-1 所示的自由落体运动经历的时间 t 等分，得到一系列相同的时间间隔 Δt，由于 Δt 很小时，物体速度变化很小，该时间间隔内的运动可以看成匀速运动，因此，根据伽利略的假设，物体每经过一个时间间隔 Δt 后，在接下来的时间间隔 Δt 内，物体下降速度会增加，增加的值近似等于 $g\Delta t$，它对应于图 6.2-2 中小矩形的面积，物体在时间 t 内总的下落高度近似等于所有矩形面积之和. 当时间间隔 Δt 趋于 0 时，图 6.2-2 中阶梯形矩形面积就等于倾斜直线、t 轴以及时间 t 对应直线所围成的三角形面积，即 $\frac{1}{2}t\cdot gt=\frac{1}{2}gt^2$.

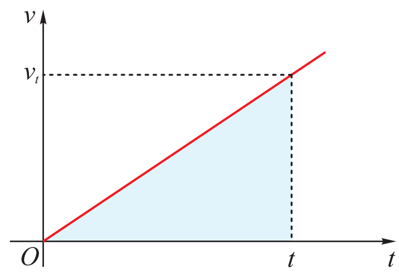


图 6.2-1

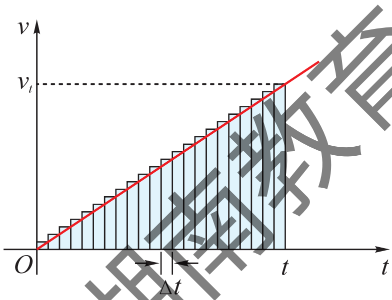


图 6.2-2

上述推导过程虽然直观但不够严谨，其严格证明需要用到牛顿-莱布尼茨所提出的微积分，而重力加速度的精确值是惠更斯得到的.

5. 模型分析与检验

伽利略做了一系列的实验来检验模型的正确性，他的实验是在斜面上进行的. 伽利略通过大量的实验验证了这样一个事实：同样的高度、同样的重物沿垂面下落和斜面下落，下落的时间之比等于垂直长度和斜面长度之比. 这个事实说明：可以利用斜面进行自由落体的实验. 于是伽利略用一块足够长的木板，在中间凿出一条光滑沟槽，让光滑的黄铜球沿着沟槽滚下，如图 6.2-3.

图 6.2-3

他实验了不同的倾斜角度，又实验了不同长度的木板，先后一百多次的实验结果均显示，黄铜球下落的距离与下落时间的平方之比近似为一个正常数，进而验证了模型的正确性.

6. 推广应用

伽利略用斜面实验验证了模型的正确性后，将斜面实验的结果推广到与水平面垂直的情况：随着斜面倾斜角度逐渐增加到 90°，小球的加速度不断变大，小球逐步过渡到自由落体运动，如图 6.2－4. 至此，他成功地验证了原先的猜想，得到了自由落体运动的规律.

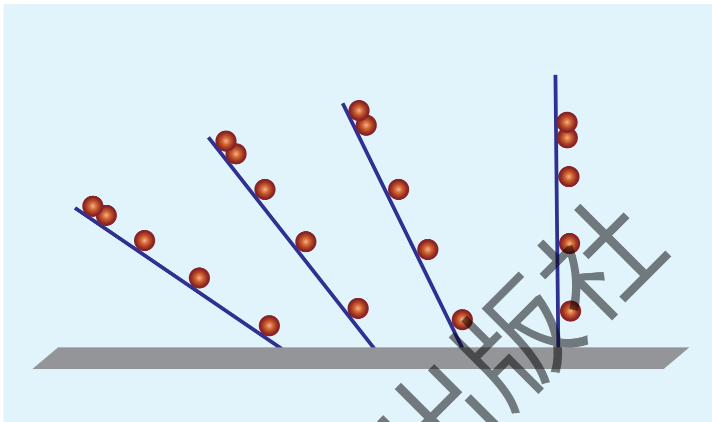


图 6.2－4　小球沿斜坡滚下的运动示意

根据自由落体运动方程的建立过程，我们可以用图 6.2－5 所示的框图来表示数学建模的基本过程.

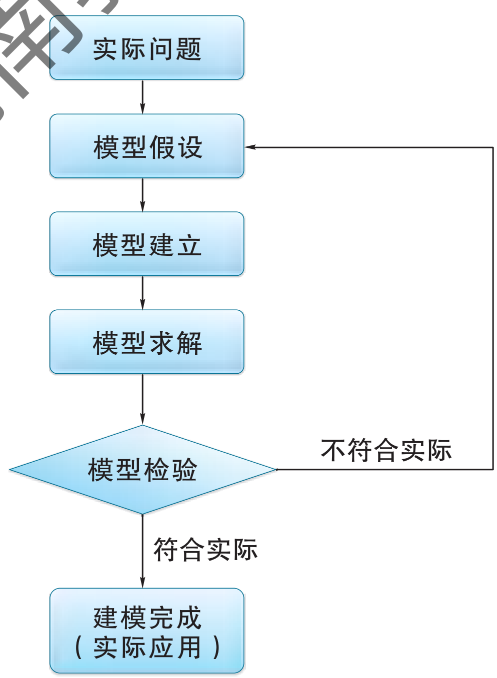


图 6.2－5

数学建模作为连接数学与实际问题的桥梁，建立既符合实际，又能够利用现有方法求解的合理数学模型就成为解决实际问题的关键步骤之一．需要说明的是，数学模型与我们通常所说的数学问题是不同的，一般的数学问题要求叙述严谨、明确、答案唯一，而根据实际问题建立的数学模型及由此得到的答案通常不具有唯一性，判断数学模型的优劣以是否符合实际为标准.

练习

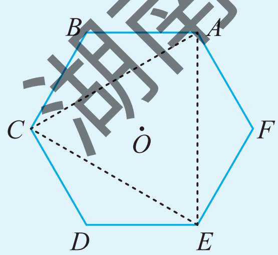
问题研究一：

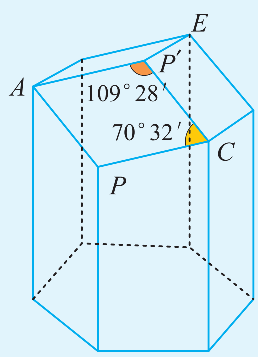
将一张四条腿同样长的椅子放在不平的地面上(四脚的连线为正方形)，只允许对椅子绕四脚连线构成的正方形的中心旋转，建立数学模型讨论：是否存在某个旋转角度不超过 90°，能使椅子的四条腿同时着地?

若椅子四脚的连线为矩形，结论有何变化?

问题研究二：

查找并阅读关于蜂房结构的资料，建立数学模型说明蜂房正面采用正六边形面，底端是封闭的六角棱锥体的底，由三个相同的菱形组成(菱形的锐角为 $70^\circ32'$，钝角为 $109^\circ28'$)的原因.





6.3 数学建模案例（一）：最佳视角

一 问题背景

当我们和朋友一起流连忘返于展览大厅欣赏精美的艺术品，或在节假日陪伴家人沉醉于大自然美景时，可能常常不经意地调整观察路线，便于我们能够对感兴趣的目标有一个最清晰的观察．这种最清晰的观察就可以通过建立最佳视角的数学模型来完成．

从数学上看，对什么是最佳视角并没有一个严格的定义，针对不同的问题，最佳视角的含义有所不同．例如，当我们希望对物体的全貌进行最清晰的观察时，最佳视角是关于面积最大的问题，而在 6.1 节提出的足球运动员射门角度问题中，其最佳视角则对应于球员与所对球门张成的最大角度．

本节我们仅从观察者与所观察物体张成的最大角度出发，讨论与之有关的**最佳视角模型**．

二 问题解析

最佳视角问题在我们的生活中还有很多，例如：

（1）如图 6.3－1，观众在观看某美术馆墙上悬挂的一幅画作时，经常会前、后、左、右移动，以使得观看该画最清晰，你能够从最大视角的角度解释他脚步移动的原因吗？

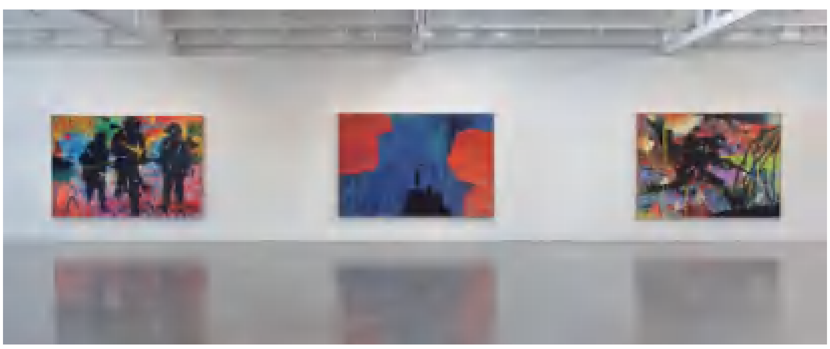


图 6.3－1

（2）对于一座山或高大建筑物（不可及但高度知道），且在平地上可以看见山或

建筑物顶上有一个标志性塔或旗杆，如何在平地上寻找位置，使在该位置观看塔或旗杆的视角最大？

下面我们通过建立数学模型的方法来解决最佳视角问题．

1．模型建立与求解

（1）建立数学模型

最佳视角问题可以抽象成下面的数学模型：如图 6.3－2，直线 AB 垂直于地面，垂足为 O，设 $OA=a$，$OB=b(a>b>0)$，过 O 点任作一条垂直于 OA 的直线 l，问题：在直线 l 上找出点 C，使得在这点的视角$\angle ACB$最大．

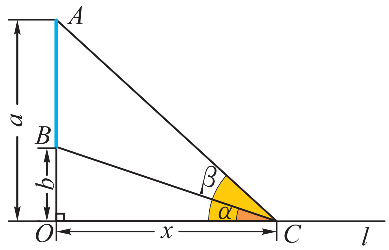


图 6.3－2

> 最大视角问题作为数学问题的提出可以追溯到 15 世纪著名的德国三角学专家米勒，史称米勒问题．

（2）模型求解

最大视角问题早期常见解法包括平面几何法与三角函数法，下面我们用三角函数法讨论其求解方法．

设 $OC=x$，$\angle ACO=\beta$，$\angle BCO=\alpha$，利用差角的正切公式

$$\tan\angle ACB=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}}=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$，即 $x=\sqrt{ab}$时，等号成立，此时 $\tan\angle ACB$ 取最大值$\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$．

由于 $y=\tan x$ 在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，且$\angle ACB\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，

故当 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan\angle ACB$ 最大，此时视角$\angle ACB$也最大．

2．模型的进一步讨论

按照数学建模的流程，还需要对模型解的正确性进行检验．以观赏一幅悬挂在美术馆墙面上的画作为例，参观者脚步的左右移动和前后移动分别对应于通过脚步移动寻找人眼与画作在横向以及纵向上的最大张角．你可以选择模型所得到最佳视角的位置以及其他的位置，体验模型结果的合理性．

而从最佳视角问题本身来看，也可对上述问题做进一步拓展．例如：

（1）在电影或电视拍摄过程中，如果升降机的水平位置固定，现场指挥人员经

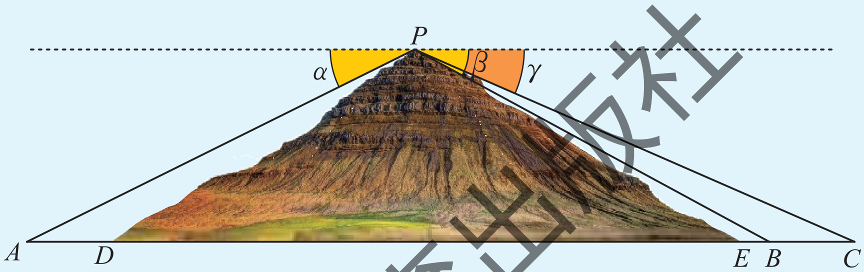
常对他所乘坐的升降机的高度进行调整以拍摄空中的场景．如何求出工作人员的位置使其观看场景最清楚．

（2）更一般的问题：当人们眺望对面山顶景物（如岩崖画、观光塔）时，可能位于水平地面上、有一定坡度的山坡上或者上述两者兼而有之．如何找出视野最清晰的观景位置．

练习

问题研究一： 估计隧道长度

如图，在山顶 P 点已测得三点 A，B，C 的俯角分别为 α，β，γ，其中 A，B，C 为山脚下两侧共线的三点．现欲沿直线 AC 挖掘一条隧道，试根据测得的 AD，EB，BC 的长度，建立估计隧道 DE 长度的数学模型．

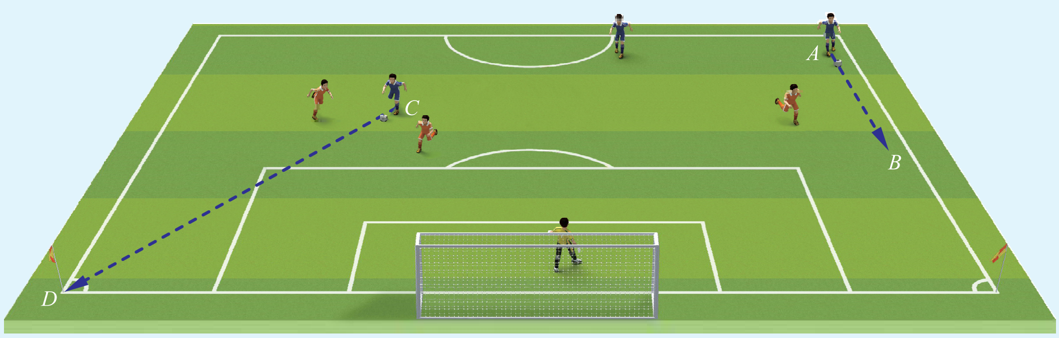


问题研究二： 足球射门的最佳位置

如图，足球运动员在国际标准足球场上沿下列几种直线（方向）带球推进，试寻找最佳的射门位置，使得射门的命中角最大．

（1）沿着贴近球场边线 AB 的直线推进；

（2）沿与底线成 45° 夹角的直线 CD 推进，并推广到推进路线与底线成 α 角的情形．



6.4 数学建模案例(二)：曼哈顿距离

一 问题背景

城市观光客行走在大街小巷，若测量他们沿直线行走的距离，我们可以以该直线为轴建立数轴，确立起点 A 和终点 B 的坐标 x_1，x_2 后，则其行走距离表示为 $d(A,B)=|x_1-x_2|$.

在现实生活中，许多城市的街道是相互垂直或平行的，人们往往要通过直角拐弯行走才能到达目的地，比如图 6.4-1 的场景.

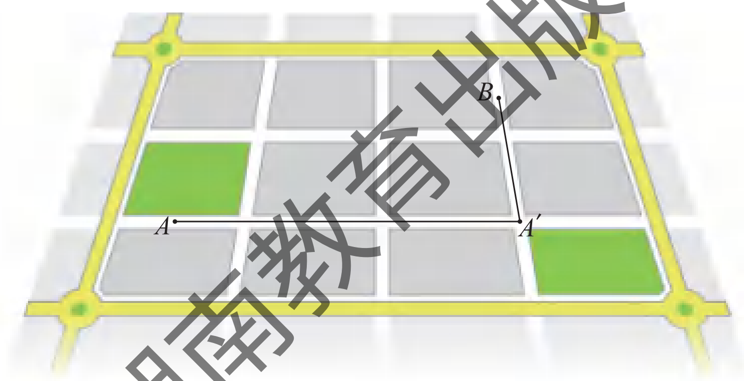


图 6.4-1

此时，按照街道的垂直和平行方向建立直角坐标系后，则从 $A(x_1,y_1)$处走到 $B(x_2,y_2)$处的距离 $d(A,B)$为从 $A(x_1,y_1)$处走到 $A'(x_2,y_1)$处的距离加上从 $A'(x_2,y_1)$处走到 $B(x_2,y_2)$处的距离，即

$$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

我们称该距离为“曼哈顿距离”.

不难验证，对于平面上任意三点 A，B，C，曼哈顿距离满足

$$d(A,C)\leqslant d(A,B)+d(B,C).$$

> “曼哈顿距离”这个概念是由德国数学家闵可夫斯基提出的.

一般情况下，设平面上有点 $A(x,y)$以及点 $B_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则点 A 到点 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$的曼哈顿距离 Z 定义为点 A 到 n 个点 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$的曼哈顿

距离之和，即

$$Z=\sum_{i=1}^{n} d(A, B_i).$$

本节重点讨论与曼哈顿距离有关的数学模型.

二 问题解析

许多以曼哈顿距离为背景的实际应用问题都是以某点到已知各点的曼哈顿距离最小作为约束条件，建立数学模型以确定该点的位置. 下面从一个实际例子出发来探讨相应的数学建模过程.

1. 模型建立与求解

首先考虑一个较简单问题的数学建模.

问题 如图 6.4－2，某地三个新建居民区的位置分别位于三点 $A(3, 20)$，$B(-10, 0)$，$C(14, 0)$处. 现计划在 x 轴上方区域(包含 x 轴)内的某一点 P 处修建一个文化中心，试确定点 P 的位置，使其到三个居民区的曼哈顿距离最小.

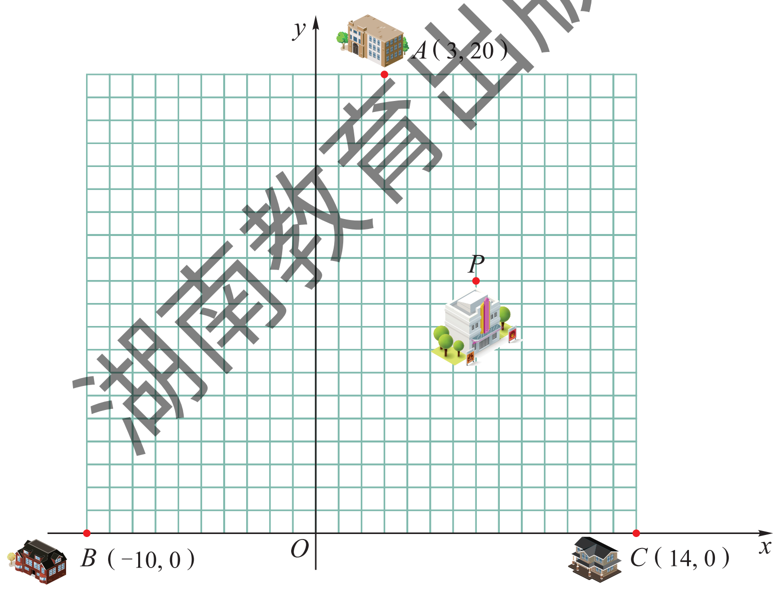


图 6.4－2

(1) 建立数学模型

设点 $P(x, y)$，$y\geqslant 0$，则点 P 到三个点的曼哈顿距离

$$\begin{aligned}Z=d(x, y)&=|x-3|+|y-20|+|x+10|+|y|+|x-14|+|y|\\&=(|x-3|+|x+10|+|x-14|)+(|y-20|+2|y|).\end{aligned}$$

(2) 模型求解

由于水平方向与垂直方向的距离分别为 $X=h(x)=|x-3|+|x+10|+|x-14|$ 与 $Y=v(y)=|y-20|+2|y|$，它们互不影响，且 $Z=X+Y=h(x)+v(y)$，因此 Z 的最小值 $Z_{\min}$ 等于水平距离 X 的最小值 $X_{\min}$ 与垂直距离 Y 的最小值 $Y_{\min}$ 之和，即有

$$Z_{\min}=X_{\min}+Y_{\min}=\min_{x\in\mathbf{R}} h(x)+\min_{y\in\mathbf{R}} v(y).$$

因为

$$X=h(x)=|x-3|+|x+10|+|x-14|\geqslant|x+10|+|x-14|,$$

当且仅当 $x=3$ 时，不等式等号成立.

$$|x+10|+|x-14|\geqslant|-(x+10)+(x-14)|=24$$

对于 $x\in[-10,14]$都成立，因此仅当 $x=3$ 时，等号成立，此时 $X_{\min}=24$.

类似可得，当 $y=0$ 时，$Y_{\min}=20$.

上述讨论表明，当文化中心修建在 $P(3,0)$时，它距三个居民区的曼哈顿距离最小，最小距离是 44.

对于上述问题，如果我们添加一个条件，例如，假设以 O 为圆心、半径为 1 的圆的内部是保护区，人们不能进入，其他假设不变. 试重新确定 P 的位置，使其到三个居民区的曼哈顿距离最小. 此时，只需要将限制条件改用数学语言来描述，单位圆内部区域不能进入则相当于在模型的求解中添加限制条件 $y\geqslant1$. 同样可以解得文化中心的位置为 $P(3,1)$，此时文化中心到三个居民区的曼哈顿距离的最小值为 45.

上面我们通过解不等式的方法得到了模型的解，事实上，还可以通过画出函数 $h(x)=|x-3|+|x+10|+|x-14|$ 与函数 $v(x)=|x-20|+2|x|$(将模型中的变量 y 换成 x 来处理)的图象，同样可以得到模型的解.

2. 模型的进一步讨论

在实际生活中，还有许多的问题可以归结为基于曼哈顿距离的数学模型来求解. 下面以设置机器零件检验台的位置为例来说明.

如图 6.4-3，工作效率相同的 n 台机器位于一条直线上，每台机器生产的零件均需送到同一个检验台上检验，检验合格后才能进入下一道工序. 已知零件在这条直线上的传送速度均相同，问检验台的位置设在哪里可以使得零件传送时总的距离最小?

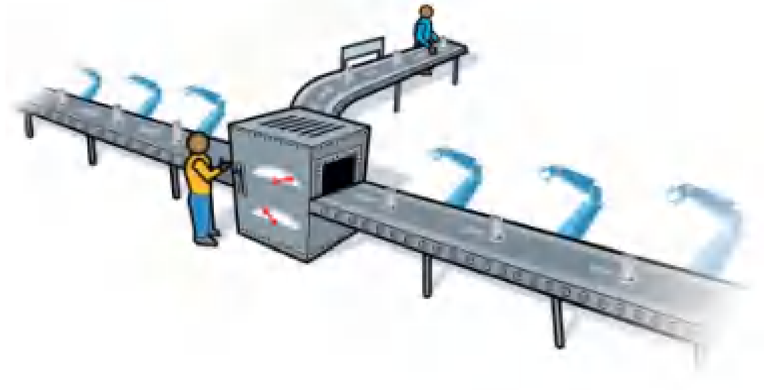


图 6.4-3

上述问题的数学模型为

$$y=|x-A_1|+|x-A_2|+\cdots+|x-A_n|,$$

其中 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$是第 k 个零件的位置，x 是待求的检验台位置，y 是零件传送的总距离.

将 n 个常数 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 从小到大排列，则有

(1) 当 $n=2m+1(m\in\mathbf{N}_+)$时，则当 $x=A_{m+1}$时，y 取得最小值，且最小值为 $\sum\limits_{k=1}^{m}(A_{m+k+1}-A_k)$；

(2) 当 $n=2m(m\in\mathbf{N}_+)$时，则当 $x\in[A_m, A_{m+1}]$时，y 取得最小值，且最小值为 $\sum\limits_{k=1}^{m}(A_{m+k}-A_k)$.

除了上面描述的曼哈顿距离外，许多实际问题还可以转化为以其他距离最值为约束条件的数学模型来解决.

练习

问题研究一：确定中心医院的位置

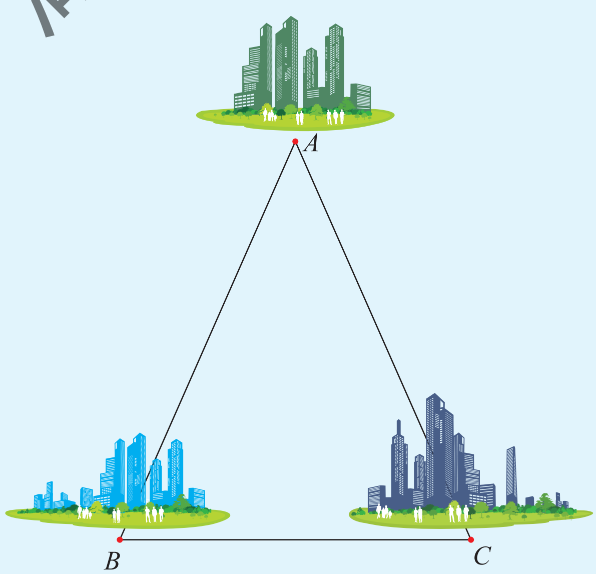
如图，有三个新兴城镇分别位于 A，B，C 处，且 $AB=AC=a$，$BC=2b(a>b)$. 今计划在 BC 的垂直平分线上建一个中心医院 P，方便三镇居民就医，试在下列条件下求 P 的位置：

(1) P 到三镇距离平方和最小；

(2) P 到三镇距离之和最小；

(3) P 到三镇的最远距离最小.

你能建立有 n 个新兴城镇的情形时修建医院的模型吗?



问题研究二：公路设计最小费用问题

如图，某地为了开发旅游资源，欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路．点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$，且 $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$，点 P 到平面 α 的距离 $PH=0.4$ km．沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用．从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km，原有公路改建费用为 $\dfrac{a}{2}$ 万元/km．当山坡上公路长度为 l km$(1\leqslant l\leqslant 2)$时，其造价为 $(l^2+1)a$ 万元．已知 $OA\perp AB$，$PB\perp AB$，$AB=1.5$ km，$OA=\sqrt{3}$ km．

（1）在 AB 上求一点 D，使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小．

（2）对于(1)中得到的点 D，在 DA 上求一点 E，使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小．

（3）在 AB 上是否存在两个不同的点 D'，E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于(2)中得到的最小总造价？证明你的结论．

（4）你能将上述模型进行推广，解决其他的实际问题吗？

6.5 数学建模案例(三)：人数估计

一 问题背景

在日常生活或科学研究中，经常碰到只知道部分信息，却需要从已知的部分信息出发去估计出全部信息的问题. 例如，医疗科研机构调查某慢性病的患者人数，某地旅游局统计当年到该地旅游的总人数，等等. 这时统计模型与方法就成为解决这类问题的重要工具. 下面我们讨论一个较简单的实际问题，体会统计模型的思想与方法.

问题 某大学美术系平面设计专业的报考人数连创新高，今年报名刚结束，某考生想知道报考人数. 考生的考号按 0001，0002，…的顺序从小到大依次排列. 该考生随机了解了 50 个考生的考号，具体如下：

0400	0904	0747	0090	0636	0714	0017	0432	0403	0276
0986	0804	0697	0419	0735	0278	0358	0434	0946	0123
0647	0349	0105	0186	0079	0435	0960	0543	0495	0974
0219	0380	0397	0283	0504	0140	0518	0966	0559	0910
0658	0442	0694	0065	0757	0702	0498	0156	0225	0327

请你给出一种方法，根据这 50 个随机抽取的考号，估计考生总数.

二 问题解析

上述问题中，总体中的个体已按自然数编号，然后在自然数 1，2，3，…，N 中不放回地随机抽取 n 个数(这里 $n=50$)，将抽取的样本从小到大排序后记为 x_1，x_2，…，x_n，其中 $1\leqslant x_n\leqslant N$. 一般来说，关于考生总数没有精确的估计方法，如果不能获取其他辅助信息，则只能利用样本估计总体的方法进行近似估计.

为使估计值尽量接近真值，可以在多种假设的条件下采用不同的估计方法来建立数学模型并求解.

1. 模型建立与求解

模型 1　用样本最大值估计总体的最大值.

用给出数据的最大值$\overline{N}_1=x_n$(例如，986)来估计考生总数，由于 $x_n\leqslant N$ 恒成立，因此，该方法在实际应用中很可能出现低估 N 的情况.

模型 2　用样本中位数估计总体中位数.

当 n 为奇数时，样本的中位数为 $x_{\frac{n+1}{2}}$，而总体的中位数取$\frac{N+1}{2}$，由于样本中位数可以近似看成总体中位数，因而有 $x_{\frac{n+1}{2}}\approx\frac{N+1}{2}$，故可取$\overline{N}_2=2x_{\frac{n+1}{2}}-1$ 作为 N 的估计值；

当 n 为偶数时，样本的中位数为$\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$，从而有$\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}\approx\frac{N+1}{2}$，取$\overline{N}_2=x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}-1$ 作为 N 的估计值.

为了避免这种方法得到的估计值偏小的问题，可以考虑用下面的方法对考生总数 N 进行调整：

$$\overline{N}_2=\begin{cases}\max\{2x_{\frac{n+1}{2}}-1,\ x_n\}，n\text{ 为奇数；}\\ \max\{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}-1,\ x_n\}，n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

在本问题中，$n=50$ 且 $x_{50}>x_{25}+x_{26}-1$，因此可用 986 来估计考生总数.

一般情况下，样本点越多，估计值会越合理．而上述方法的求解过程并没有利用已获得的全部样本信息，因此我们需要建立更为合理的数学模型.

模型 3　用样本的平均值估计总体的平均值.

假设随机抽取的 50 个数的平均值近似等于所有考号的平均值，以此来估计考生总数 N．由于这 50 个数的算术平均值为 $24\ 572\div50=491.44$，它应该与$\frac{N}{2}$接近．因此取$\overline{N}_3=491.44\times2\approx983$ 作为 N 的估计值．由于 983 小于样本的最大值 986，因此可用 986 来估计考生总数.

模型 4　用分区间方法求解.

把这 50 个样本从小到大排列，利用它将 N 个数据分段，选取不同端点，则得到不同的估计值.

分区间的一种方法是：利用 50 个样本数据，将区间$[1,\ N]$分成 51 个小区间$[1,\ x_1)$，$[x_1,\ x_2)$，…，$[x_{50},\ N]$．这 51 个小区间长度均值为$\frac{N-1}{51}$，而前 50 个区间的平均长度为$\frac{x_{50}-1}{50}$，由于样本是随机抽取的，可以认为$\frac{N-1}{51}\approx\frac{x_{50}-1}{50}$，所以 N 的估计值可取为

$$\overline{N}_4=\left\{\frac{51(x_{50}-1)}{50}+1\right\}=1\ 006,$$

其中$\{x\}$表示不小于 x 的最小整数.

上述分区间的方法忽略了 x_{50}可能取到 N 的情况，因此，我们也可以将区间$[1, N]$ 改为$[1, N+1]$，即把$[1, N+1]$分成 51 个小区间$[1, x_1)$，$[x_1, x_2)$，…，$[x_{50}, N+1]$，取$\frac{N}{51}\approx\frac{x_{50}-1}{50}$，所以 N 的估计值可取为

$$\overline{N}_5=\left\{\frac{51(x_{50}-1)}{50}\right\}=1\ 005.$$

2. 模型的进一步讨论

前面我们采用不同的方法对考生总数进行了估计，发现估计方法不同得到的考生总数也不同，存在一定的差异. 而分区间方法由于划分小区间所采用的分段方式不同，也有可能得到不同的估计值. 但这些结果都是在某种合理的假设前提下得到的，不能说哪种方法得到的估计值一定是错的. 这也体现了统计方法的特点.

按照不同的估计方法往往会得到不同的估计值，那么有没有评价估计方法优劣的标准呢?

我们可以利用计算机模拟各种估计方法，然后通过计算估计值与真值之间的偏离程度来评价估计方法的优劣. 具体实施步骤如下:

步骤(1) 设定 N 以及试验次数 k 的值;

步骤(2) 在 1，2，…，N 这 N 个自然数中不放回地随机抽取 50 个数据，组成一个样本;

步骤(3) 将样本中的 50 个数据按从小到大排列，即 $x_1<x_2<\cdots<x_{50}$;

步骤(4) 按照不同的估计方法分别得到不同的估计值;

步骤(5) 重复上述步骤(1)～(4)k 次.

模拟完后，对估计值偏离真值 N 的程度进行计算:

设第 $m(1\leqslant m\leqslant k)$次试验得到的估计值为$\overline{N}_m$，$k$ 次模拟得到的估计值与真值 N 之间的近似程度用估计值与真值差的平方的平均值来衡量，即计算

$$\frac{(N-\overline{N}_1)^2+(N-\overline{N}_2)^2+\cdots+(N-\overline{N}_k)^2}{k},$$

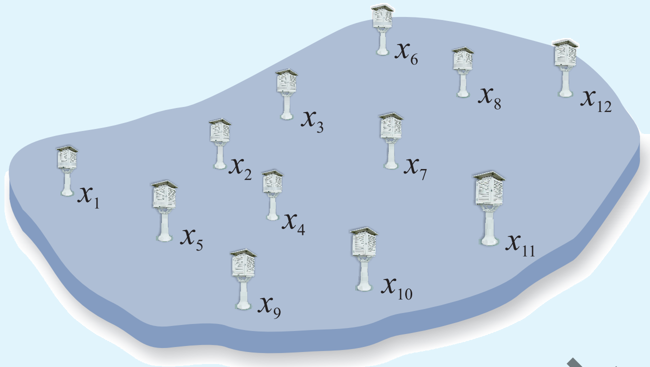
将其值记为 *MSE*.

结论：当试验次数 k 足够大时，*MSE* 的大小反映了采用不同估计方法得到的估计值偏离真值 N 的程度. 具有较小 *MSE* 值的估计方法更为合理.

练习

问题研究： 气象观测站调整方案

某地区有 12 个气象观测站(如图)，十年来各观测站测得的年降水量如下表所示．为了节省开支，想适当减少几个观测站．问：减少哪些观测站可以使所得到的年降水量的信息量仍然足够大？



2008—2017 年某地区气象观测站所测年降水量表（单位：mm）

观测站	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
2008 年	276.2	324.5	158.6	412.5	292.8	258.4	334.1	303.2	292.9	243.2	159.7	331.2
2009 年	251.1	287.3	349.5	297.4	227.8	453.6	321.5	451.0	466.2	307.5	421.1	455.1
2010 年	192.7	438.2	289.9	366.3	466.2	239.1	357.4	219.7	245.7	411.1	357.0	353.2
2011 年	246.2	232.4	243.7	372.5	460.4	158.9	298.7	314.5	256.6	327.0	296.5	423.0
2012 年	291.7	311.0	502.4	254.0	245.6	324.8	401.0	266.5	251.3	289.9	255.4	362.1
2013 年	466.5	158.9	223.5	425.1	251.4	321.0	315.4	317.4	246.2	277.5	304.2	410.7
2014 年	258.6	327.4	432.1	403.9	256.6	282.9	389.7	413.2	466.5	199.3	282.1	387.6
2015 年	453.4	365.5	357.6	258.1	278.8	467.2	355.2	228.5	453.6	315.6	456.3	407.2
2016 年	258.5	271.0	410.2	344.2	250.0	360.7	376.4	179.4	159.2	342.4	331.2	377.7
2017 年	324.8	406.5	235.7	288.8	192.6	284.9	290.5	343.7	283.4	281.2	243.7	411.1

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英文名	页码
有向线段	directed line segment	2
向　量	vector	2
模	module	2
向量的加法	vector addition	6
三角形法则	triangle law	6
平行四边形法则	parallelogram law	7
共　线	collinear	15
单位向量	unit vector	17
基	basis	23
坐　标	coordinates	23
数量积	inner product	32
投　影	projection	34
余弦定理	law of cosines	42
正弦定理	law of sines	44
三角恒等变换	triangle identical transformation	82
复　数	complex number	100
实　部	real part	100
虚　部	imaginary part	100
虚　数	imaginary number	101
复平面	complex plane	109
实　轴	real axis	109
虚　轴	imaginary axis	109
共轭复数	conjugate complex number	111
多面体	polyhedron	130
面	face	130
棱	edge	130
顶　点	vertex	130
旋转体	rotation	130
棱　柱	prism	131
底　面	basal pinacoid	131
侧　面	lateral	131

中文名	英文名	页码
侧　棱	lateral edge	131
直棱柱	right prism	131
棱　锥	pyramid	132
棱　台	prismoid	132
圆　柱	circular cylinder	133
母　线	generating line	133
圆　锥	circular cone	134
轴	axis	134
圆　台	frustum of cone	134
球	solid sphere	134
异面直线	skew lines	147
相　交	intersection	147
平　行	parallel	147
垂　直	perpendicular	156
垂　线	perpendicular	156
距　离	distance	158
二面角	dihedral angle	171
样本点	sample point	203
样本空间	sample space	203
随机事件	random event	204
事　件	event	204
互　斥	exclusive	206
概　率	probability	210
频　率	frequency	222
独　立	independent	228
数学建模	mathematical modeling	239

后　记

为全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，加快实现教育现代化和建设教育强国的宏伟目标，并为学生的终身发展奠定良好基础，我们依据教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，组织专家编写出《普通高中教科书·数学》，现将本书热忱地奉献给广大读者.

本书的编写遵循《普通高中数学课程标准(2017 年版)》确立的基本理念和目标要求，以发展学生数学核心素养为导向，通过选取体现时代发展、科技进步和符合学生生活经验的素材，采取符合学生认知发展规律的呈现方式，帮助学生在获得必要的基础知识和基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验的过程中，进一步发展其思维能力、实践能力和创新意识. 在教科书编写过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧. 一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订编写提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的谢意！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期而艰巨的任务. 我们真诚地希望广大师生在使用本书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成数学教科书建设这一光荣的使命！

教材编写委员会